حل التمرين 04-01:

النموذج الأصلي	النموذج الثنائي (المرافق)
$\text{Max : } Z= 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 3X_4$ $S/c \begin{cases} 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 60 \\ 2X_1 + 6X_3 \geq 24 \\ 7X_1 + 3X_2 + 4X_4 \leq 70 \end{cases}$ $X_1 \geq 0;\ X_2$: غير محدد الاشارة$;\ X_3 \leq 0;\ X_4 \geq 0$	$\text{Min : } W= 60y_1 + 24y_2 + 70y_3$ $S/c \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 7y_3 \geq 3 \\ 5y_1 + 3y_3 = 2 \\ 3y_1 + 6y_2 \leq 4 \\ 2y_1 + 4y_3 \geq 3 \end{cases}$ y_1: غير محدد الاشارة ; $y_2 \leq 0;\ y_3 \geq 0$
$\text{Min : } W= 24y_1 + 16y_2$ $S/c \begin{cases} 4y_1 + 8y_2 \leq 100 \\ 5y_1 + 3y_2 = 50 \\ y_2 \geq 30 \end{cases}$ y_1: غير محدد الاشارة ; $y_2 \leq 0$	$\text{Max : } Z= 100X_1 + 50X_2 + 30X_3$ $S/c \begin{cases} 4X_1 + 5X_2 = 24 \\ 8X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 16 \end{cases}$ $X_1 \leq 0;\ X_2$: غير محدد الاشارة $X_3 \geq 0$;

حل التمرين 04-02:

1. حل النموذج بطريقة السمبلكس

الشكل القياسي:

$$\text{Min : } W= 2Y_1 + 2Y_2 + 0S_1 + 0S_2 + Ma_1 + Ma_2$$
$$S/c \begin{cases} 8Y_1 + 4Y_2 - S_1 + 0S_2 + a_1 + 0a_2 = 120 \\ 6Y_1 + 9Y_2 + 0S_1 - S_2 + 0a_1 + a_2 = 150 \end{cases}$$
$$Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0$$

	C_i	2	2	0	0	M	M		
C_b	Y_i	Y_1	Y_2	S_1	S_2	a_1	a_2	b_i	b_i/ Y_i
M	a_1	8	4	-1	0	1	0	120	15
M	a_2	6	9	0	-1	0	1	150	25
W_j		14M	13M	-M	-M	M	M	270M	
$C_i - W_j$		2-14M	2-13M	M	M	0	0		

	C_i	2	2	0	0	M	M		
C_b	Y_i	Y_1	Y_2	S_1	S_2	a_1	a_2	b_i	b_i/ Y_i
2	Y_1	1	1/2	-1/8	0	1/8	0	15	30
M	a_2	0	6	3/4	-1	-3/4	1	60	10
W_j		2	1+6M	-1/4+3M/4	-M	1/4-3M/4	M	60M+30	
$C_i - W_j$		0	1-6M	1/4-3M/4	M	-1/4+7M/4	0		

	C_i	2	2	0	0	M	M		
C_b	Y_i	Y_1	Y_2	S_1	S_2	a_1	a_2	b_i	b_i/ Y_i
2	Y_1	1	0	-3/16	1/12	3/16	-1/12	10	
2	Y_2	0	1	1/8	-1/6	-1/8	1/6	10	
W_j		2	2	-1/8	-1/6	1/8	1/6	40	
$C_i - W_j$		0	0	1/8	1/6	M-1/8	M-1/6		

و عليه فان الجدول الاخير يمثل جدول الحل الأمثل و تتمثل قيم المتغيرات القاعدية فيما يلي: $Y_1=10$، $Y_2=10$، $W= 40$

2. <u>النموذج المرافق</u>

$$\text{Max} : Z= 120X_1 + 150X_2$$

$$S/c \begin{cases} 8X_1 + 6X_2 \le 2 \\ 4X_1 + 9X_2 \le 2 \end{cases}$$

$$X_1 \ge 0; \quad X_2 \ge 0$$

3. **<u>حلول النموذج المرافق:</u>**

$X_1=1/8$، $X_2=1/6$، $Z= 40$

حل التمرين 04-03:

1. كتابة البرنامج الخطي بصيغة قياسية

$$\text{Min : } W= 100Y_1 + 300Y_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + Ma_1$$

$$S/c \begin{cases} 2Y_1 + 3Y_2 + S_1 = 150 \\ 3Y_1 + 1Y_2 - S_2 + a_1 = 60 \\ 2Y_1 + 4Y_2 + S_3 = 120 \end{cases}$$

$$Y_1, Y_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2. تشكيل جدول الحل الأولي

	C_i	100	300	0	0	0	M	قيم الحل
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	S_1	S_2	S_3	a_1	b
0	S_1	2	3	1	0	0	0	150
M	a1	3	1	0	-1	0	1	60
0	S_3	2	4	0	0	1	0	120
W_j		3M	M	0	-M	0	M	60M
C_i-W_j		100-3M	300-M	0	M	0	0	

3. تحسين الحل وتشكيل جدول سمبلكس جديد؛

	C_i	100	300	0	0	0	M	قيم الحل
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	S_1	S_2	S_3	a_1	b
0	S_1	0	7/3	1	2/3	0	-2/3	110
100	Y_1	1	1/3	0	-1/3	0	1/3	20
0	S_3	0	10/3	0	2/3	1	-2/3	80
W_j		100	100/3	0	-100/3	0	100/3	2000
C_i-W_j		0	800/3	0	100/3	0	M-100/3	

$Y_1=20$; $Y_2=0$; $W=2000$

4. ايجاد النموذج الثنائي للنموذج السابق؛

$$\begin{cases} \text{Max : } Z = 150X_1 + 60X_2 + 120X_3 \\ S/c \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 100 \\ 3X_1 + 1X_2 + 4X_3 \leq 300 \end{cases} \\ X_1 \leq 0; \quad X_2 \geq 0; \quad X_3 \leq 0 \end{cases}$$

5. ايجاد حلول النموذج الثنائي له

من جدول السمبلكس الاخير للنموذج الأصلي نجد: $Z=2000$; $X_3=0$; $X_2=100/3$; $X_1=0$

حل التمرين 04-04:

1. حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس؛

$$\begin{cases} \text{Max : } Z = 5X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ S/c \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + S_1 = 8 \\ 4X_1 + 2X_2 + S_2 = 10 \\ X_2 + S_3 = 1 \end{cases} \\ X_1; X_2; S_1; S_2; S_3 \geq 0 \end{cases}$$

	C_i	5	4	0	0	0	قيم الحل
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	2	4	1	0	0	8
0	S_2	4	2	0	1	0	10
0	S_3	0	1	0	0	1	1
Z_j		0	0	0	0	0	0
C_i-Z_j		5	4	0	0	0	

	C_i	5	4	0	0	0	قيم الحل
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	3	1	-1/2	0	3
5	X_1	1	1/2	0	1/4	0	2.5
0	S_3	0	1	0	0	1	1
Z_j		5	2.5	0	2.5	0	12.5
C_i-Z_j		0	1.5	0	-2.5	0	

	C_i	5	4	0	0	0	قيم الحل
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
4	X_2	0	1	1/3	-1/6	0	1
5	X_1	1	0	-1/6	1/3	0	2
0	S_3	0	0	-1/3	1/6	1	0
Z_j		5	4	1/2	1	0	14
C_i-Z_j		0	0	-1/2	-1	0	

$X_1=2$; $X_2=1$; $Z=14$

2. ايجاد النموذج الثنائي للنموذج السابق؛

$$\text{Min : } W= 8Y_1 + 10Y_2 + 1Y_3$$
$$S/c \begin{cases} 2Y_1 + 4Y_2 \geq 5 \\ 4Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geq 4 \end{cases}$$
$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0 ; \quad Y_3 \geq 0$$

3. ايجاد حلول النموذج الثنائي له

من جدول السمبلكس الاخير للنموذج الأصلي نجد: $Y_1=0.5$; $Y_2=1$; $Y_3=0$; $W=14$

حل التمرين 04-05:

1. تحديد مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف؛

يقصد بمدى الأمثلية المجال الذي يمكن ان تتغير فيه معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف، والتي يبقى بها الحل امثلا.

لتحديد مدى الأمثلية لمعامل X_1 في دالة الهدف، نستبدل معامله في جدول الحل الأمثل السابق بالمعامل C وذلك كما يلي:

	C_j	C	2	5	0	0	
C_b	X_b	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	bi
5	X_3	0	−2/5	1	2/5	−1/5	4/5
C	X_1	1	11/5	0	−1/5	3/5	18/5
z_j		C	$-2+\frac{11}{5}C$	5	$2-\frac{1}{5}C$	$-1+\frac{3}{5}C$	$4+\frac{18}{5}C$
c_j-z_j		0	$4-\frac{11}{5}C$	0	$-2+\frac{1}{5}C$	$1-\frac{3}{5}C$	

حتى يبقى الحل السابق أمثلا، يجب تحقق الشروط التالية:

- $4-\frac{11}{5}C\leq 0 \Rightarrow \frac{11}{5}C\geq 4 \Rightarrow C\geq \frac{20}{11}\cong 1{,}82$
- $-2+\frac{1}{5}C\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{5}C\leq 2 \Rightarrow C\leq 10$
- $1-\frac{3}{5}C\leq 0 \Rightarrow \frac{3}{5}C\geq 1 \Rightarrow C\geq \frac{5}{3}\cong 1{,}66$

وعليه نجد ان مدى الأمثلية لمعامل X_1 هو $\frac{20}{11}\leq C\leq 10$

لتحديد مدى الأمثلية لمعامل X_2 في دالة الهدف، يجب تحقق الشرط التالي:

- $C-\frac{34}{5}\leq 0 \Rightarrow C\leq \frac{34}{5}$

وعليه نجد ان مدى الأمثلية لمعامل X_2 هو $C\leq \frac{34}{5}$، أي هو محدود من الأعلى فقط.

بنفس الطريقة سـيتم تحديد مدى الأمثلية لمعامل X_3 في دالة الهدف، حيث يتم تحديد مدى الأمثلية له عبر تحقق الشروط التالية:

- $\frac{2}{5}C-\frac{34}{5}\leq 0 \Rightarrow \frac{2}{5}C\leq \frac{34}{5}\Rightarrow C\leq 17$
- $-\frac{2}{5}\mathrm{C}+\frac{4}{5}\leq 0 \Rightarrow \frac{2}{5}C\geq \frac{4}{5}\Rightarrow C\geq 2$
- $\frac{1}{5}C-\frac{12}{5}\leq 0 \Rightarrow \frac{1}{5}C\leq \frac{12}{5}\Rightarrow C\leq 12$

وعليه نجد ان مدى الأمثلية لمعامل X_3 هو $2\leq C\leq 12$

2. تحديد مدى الامكانية للمورد الأول

يمكن الحصول على مدى الامكانية لهذا المورد وفق المتراجحة التالية:

$$RHS + (\Delta b_i)(S_1) \geq 0$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على البيانات الموجودة في الجدول، نجد:

	C_j	4	2	5	0	0	
C_b	X_b	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	bi
5	X_3	0	−2/5	1	2/5	−1/5	4/5
4	X_1	1	11/5	0	−1/5	3/5	18/5
z_j		4	34/5	5	6/5	7/5	92/5
$c_j - z_j$		0	−24/5	0	−6/5	−7/5	

$$\begin{bmatrix} 4/5 \\ 18/5 \end{bmatrix} + (\Delta b_i) \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} \geq 0$$

فنتحصل على المتراجحات التالية:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{5}\Delta b_i \geq -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\Delta b_i \geq -4 \Rightarrow \Delta b_i \geq -2$$

$$\frac{18}{5} - \frac{1}{5}\Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{5}\Delta b_i \leq \frac{18}{5} \Rightarrow \Delta b_i \leq 18$$

وعليه فان قيمة المورد الأول هي محصورة بالمجال التالي:

$$6 - 2 \leq b_1 \leq 6 + 18$$

$$4 \leq b_1 \leq 24$$

3. تحديد مدى الامكانية للمورد الثاني

يمكن الحصول على مدى الامكانية لهذا المورد وفق المتراجحة التالية:

$$RHS + (\Delta b_i)(S_2) \geq 0$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على البيانات الموجودة في الجدول، نجد:

$$\begin{bmatrix} 4/5 \\ 18/5 \end{bmatrix} + (\Delta b_i) \begin{bmatrix} -1/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \geq 0$$

فنتحصل على المتراجحات التالية:

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{5}\Delta b_i \leq \frac{4}{5} \Rightarrow \Delta b_i \leq 4$$

$$\frac{18}{5}+\frac{3}{5}\Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{5}\Delta b_i \geq -\frac{18}{5} \Rightarrow 3\Delta b_i \geq -18 \Rightarrow \Delta b_i \geq -6$$

وعليه فان قيمة المورد الثاني هي محصورة بالمجال التالي:

$$8-6 \leq b_2 \leq 8+4$$

$$2 \leq b_2 \leq 12$$

4. سعر الظل للمورد الثاني

يتم استخراج سعر الظل من تقاطع السطر ما قبل الأخير لجدول الحل الأمثل، مع العمود الخاص بـ S_2، حيث نجد القيمة $\frac{7}{5}$، أي أن سعر الظل لهذا المورد هو $\frac{7}{5}$ دج.

5. إذا تغيرت كمية المورد الثاني من 08 الى 11، أوجد قيمة Z عند الحل الأمثل، والقيم الجديدة لمتغيرات الحل الأساسي.

بما أن القيمة الجديدة لهذا المورد الثاني، أي 11، هي ضـــمن مدى الإمكانيات له، فهذا يعني ان هذا التغير لن يؤثر على أمثلية جدول الحل الســابق، وبما أن كمية المورد الثاني انتقلت من 8 الى 11، (أي: $\Delta b_i = 3$) وبالتالي فان قيم الحل الأمثل الجديدة ستكون وفق الشكل التالي:

قيمة X_3: $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\Delta b_i = \frac{4}{5}-\frac{1\times 3}{5}=\frac{1}{5}$

قيمة X_1: $\frac{18}{5}+\frac{3}{5}\Delta b_i = \frac{18}{5}+\frac{3\times 3}{5}=\frac{27}{5}$

قيمة Z: $\frac{1\times 5}{5}+\frac{27\times 4}{5}=\frac{113}{5}$

عند مقارنة القيمة القديمة لـ Z والمساوية لـ $\frac{92}{5}$ دج مع قيمتها الجديدة $\frac{113}{5}$، نجد ان الفرق بينهما هو $\frac{21}{5}$ ، وهي نفس النتيجة التي نحصـل عليها من ضـرب سـعر الظل لذلك المورد في مقدار التغير أي: $\frac{7}{5}\times 3=\frac{21}{5}$