Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département des Mathématiques et Informatique
1ère année Master Mathématiques Appliquées (2023-2024)
Éxamen Méthodes Numériques pour EDO et EDP
Nombre de pages de l'énoncé : 1. Coefficients : 2. Crédits : 5.

Le 21-01-2024 de 09h00 à 10h30

Exercice 1 *(2 pts. 09 mn)Énoncer quatre principes généraux de la méthode des éléments finis en 1D.*

Exercice 2 *(6 pts. 27 mn) On pose* $I =]a, b[$.

1. *Démontrer l'inégalité :*

$$\|y - y(a)\|^2_{L^2(I)} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|y'\|^2_{L^2(I)}, \forall y \in H^1(I).$$

2. *Soit le problème aux limites :*

$$\begin{cases} -y'' + a_0 y &= f \text{ dans } I, \\ (y(a), y'(b)) &= (0, \beta), \end{cases} \tag{1}$$

avec $a_0 \in L^\infty(I), a_0 > 0$ *p.p sur* I, $f \in L^2(I), \beta \in \mathbb{R}$. *Établir la formulation variationnelle de (1) et montrer qu'il admet une solution faible unique.*

Exercice 3 *(12 pts. 54 mn) Le but de cet exercice est de résoudre le problème suivant par la méthode des éléments finis de degré* 1, *i.e.,* P_1.

On considère l'intervalle $I =]0, 1[$ *et on introduit l'espace des solutions et des fonctions test* $\mathcal{V} = H^1_0(I)$. *On pose* $a(y, v) = \int_I y'v'dt - \int_I yv'dt$ *et* $l(v) = \int_I vdt$.

Pour tout $y, v \in \mathcal{V}$. *On considère le problème suivant :*

$$\textit{Trouver } y \in \mathcal{V} \textit{ tel que } a(y, v) = l(v), \forall v \in \mathcal{V}. \tag{2}$$

1. *Obtenir l'équation différentielle dans* I *et les conditions limites satisfaites par la solution (2).*

2. *Trouver la solution exacte de cette équation différentielle.*

3. *On pose* $h = \frac{1}{3}$. *On note* $\mathcal{V}_h$ *l'espace des fonctions* v_h *affines sur chaque sous-intervalle et continues sur* $[0, 1]$ *et vérifiant* $v_h(0) = v_h(1) = 0$.
   - 3.1. *Déterminer les fonctions de bases de* $\mathcal{V}_h$. *Quelle est la dimension de* $\mathcal{V}_h$?.
   - 3.2. *Tracer ces fonctions.*
   - 3.3. *Résoudre le système discret.*

4. *Donner une borne supérieure de l'erreur* $\|y - y_h\|_{\mathcal{V}}$.

Corrigé Type.

Solution 1 *Les principes généraux de la méthode des éléments finis en 1D :*

1. *Construction des éléments,*
2. *Nœuds,*
3. *Choix de l'espace,*
4. *Choix de la base $\mathcal{V}_h$.*

. . . . *(2 pts)*

***

Solution 2

1. *Soit $y \in H^1(I)$. on a :*

$$\forall t \in I, y(t) - y(a) = \int_a^t y'(t)dt.$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall t \in I, (y(t) - y(a))^2 \leq (t-a) \|y'\|_{L^2(I)}.$$

S'ensuit que :

$$\|y - y(a)\|^2_{L^2(I)} \leq \|y'\|_{L^2(I)} \int_I (t-a)\, dt = \frac{(b-a)^2}{2} \|y'\|^2_{L^2(I)}.$$

. . . . *(1 pt)*

2. *Multipliant l'équation (1) par une fonction test $v \in \mathcal{V} = \{y \in H^1(I)\,; y(a) = 0\}$ et intégrant, nous obtenons la formulation variationnelle de (1) est de la forme :*

$$\text{(FV) : Trouver } y \in \mathcal{V} \text{ tel que } \underbrace{\int_a^b (y'v' + a_0 yv)(t)\, dt}_{a(y,v)} = \underbrace{\int_a^b f(t)\, v(t)\, dt + \beta v(b)}_{l(v)=\langle l,v\rangle}, \forall v \in \mathcal{V}.$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et le problème variationnelle (FV) admet une unique solution puisque :

$|a(y,v)| = \left|\int_a^b (y'v' + a_0 yv)(t)\, dt\right| \leq \max(1, a_0) \|y\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}.$

$a(y,y) \geq \min(1, a_0) \|y\|^2_{\mathcal{V}}.$

$|l(v)| = \left|\int_a^b f(t)\, v(t)\, dt + \beta v(b)\right| \leq \left(\|f\|_{L^2} + \widetilde{C}\, |\beta|\right) \|v\|_{\mathcal{V}}.$

. . . . *(5 pts)*

Posant $v = y$ dans la formulation correspondante, nous obtenons $\min(1, a_0) \|y\|^2_{\mathcal{V}} \leq a(y,y) = l(y) \leq \|f\|_{L^2} \|y\|_{\mathcal{V}}$ *et donc* $\|y\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\min(1,a_0)}$.

***

Solution 3 1. *Le problème différentielle est :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -y'' + y' &=& 1, \quad t \in \left]0,1\right[, \\ y(0) &=& 0, \\ y(1) &=& 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

. . . . *(2 pts)*

2. *La solution exacte de (3) est*

$$y(t) = t - \frac{e^t - 1}{e - 1}, \forall t \in [0,1].$$

. . . . *(2 pts)*

3. *Une base de l'espace discret $\mathcal{V}_h$ est formée des fonctions ϕ_i, pour $i \in \{0,1,2,3\}$ définies par :*

   $\phi_0(t) = 1 - 3t$ *si* $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$,

   $\phi_1(t) = 3t$ *si* $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ *et* $\phi_1(t) = 2 - 3t$ *si* $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$,

   $\phi_2(t) = 3t - 1$ *si* $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ *et* $\phi_2(t) = 3 - 3t$ *si* $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$,

   $\phi_3(t) = 3t - 2$ *si* $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

   . . . . *(2 pts)*

   $\dim \mathcal{V}_h = 2.$

   . . . . *(1 pt)*

   Trace :

   . . . . *(1 pt)*

   La solution discrète y_h est de la forme : $y_h = \sum_{i=1}^{2} y_i \phi_i(t)$, où les coefficients y_i sont solutions du système linéaire suivant : $AY = b$, avec les notations :

$$\begin{array}{rcl} Y &=& (y_0, y_1)^T, \\ A &=& (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2}, a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \displaystyle\int_0^1 \left(\phi_i' \phi_j' - \phi_i \phi_j'\right)(t)\, dt, A = \begin{pmatrix} 6 & -3 - \frac{1}{2} \\ -3 + \frac{1}{2} & 6 \end{pmatrix}, \\ b &=& (b_i)_{1 \le i \le 2}, b_i = \displaystyle\int_0^1 \phi_i(t)\, dt, b = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

   . . . . *(2 pts)*

   Le système $AY = b$ admet donc une solution unique.

4. D'après le lemme de Céa

$$\|y - y_h\|_{\mathcal{V}} \leq C \|y - v_h\|_{\mathcal{V}}, \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

En choisissant $v_h = \Pi_h y \in \mathcal{V}_h$, *nous obtenons*

$$\|y - y_h\|_{\mathcal{V}} \leq C \|y - \Pi_h y\|_{\mathcal{V}} \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } h \longrightarrow 0.$$

De plus, on a $y \in H^2(I)$ *et*

$$\|y - y_h\|_{\mathcal{V}} \leq C \|y - \Pi_h y\|_{\mathcal{V}} \leq Ch \|y''\|_{L^2(0,1)},$$

où C *est une constante positive indépendante de* h. *Donc, la méthode est converge d'ordre 1.*

. . . . *(2 pts)*

I. Rezzoug