Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département de Mathématiques et d'informatique
2ème année Master Mathématiques Appliquées (2023-2024)
Éxamen Théorie du Contrôle
Nombre de pages de l'énoncé : 1. Coefficients : 2. Crédits : 4.

Le 18-01-2024 de 13 à 14h30

Exercice 1 ***(7 pts)*** *Soit A un opérateur défini par $Ay = -\frac{d^2y}{dt^2}$ pour tout*

$$y \in \mathcal{D}(A) = \left\{ y \in L^2(0,\pi);\, \frac{d^2y}{dt^2} \in L^2(0,\pi);\, y(0) = y(\pi) = 0 \right\}.$$

$E = L^2(0,\pi)$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f,g)_E = \int_0^\pi f(t)\overline{g(t)}dt, \forall f, g \in L^2(0,\pi).$$

1. *Vérifier que A est un opérateur linéaire.*
2. *Montrer que A est auto-adjoint c'est-à-dire $A^* = A$ (ce qui implique que A est fermé).*
3. *Déduire que $(-A)$ engendre un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe (de contraction) $\{\mathcal{S}(t); t \geq 0\}$ sur $E = L^2(0,\pi)$.*
4. *Déterminer les valeurs propres de A et les fonctions propres associées.*
5. *Donner l'expression de $\mathcal{S}(t)x$ pour $x \in L^2(0,\pi)$ ainsi que l'expression de Ax pour $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Exercice 2 ***(7 pts)*** *La position d'un train sur une voie est repérée par sa position $y(t)$ et son accélération est commandée par la relation*

$$\frac{d^2}{dt^2}y = u(t); y(0) = y_0, \frac{d}{dt}y(0) = y_1 \text{ ; où } \overline{y}_0 = (y_0, y_1)^t \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

1. *Écrire l'équation différentielle (1) sous la forme d'un système du premier ordre.*
2. *Montrer que pour le nouveau système, la matrice Grammienne est non singulière pour $T > 0$.*
3. *Trouver le contrôle $\overline{u}(t)$ qui transfère l'état $(y_0, y_1)^t$ à l'origine $\overline{y}_1 = (0,0)^t$, au temps $T = 1$.*

Exercice 3 ***(7 pts)*** *On considère le système de contrôle linéaire observé d'un oscillateur harmonique : $y' = Ay, z = Cy$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que la paire (A, B) est contrôlable.*
2. *Déterminer la Grammienne d'observabilité de ce système et déduire que le système est observable.*
3. *Donner la matrice de Kalman d'observabilité.*

Solution 1 *1.* $A(\alpha y+\beta z)=-\frac{d^2}{dt^2}(\alpha y+\beta z)=\alpha Ay+\beta Az;\forall y,z\in E=L^2(0,\pi)$ *(clair)*

. . . . **(1 pt)**

2. *On a tout d'abord :*

$$\langle Ay,y\rangle_E=\left\langle -\frac{d^2y}{dt^2},y\right\rangle_E=\int_0^\pi\left(-\frac{d^2y}{dt^2}\right)ydt,$$

par intégration par partie, on obtient que :

$$\langle Ay,y\rangle_E=\int_0^\pi\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dt>0 \text{ puisque } y(0)=y(\pi)=0,$$

donc $\langle Ay,y\rangle_E>0$, *c'est-à-dire* A *est positive.*
A *est auto-adjoint : on a* $\forall y\in\mathcal{D}(A)$ *et* $z\in\mathcal{D}(A^*)$:

$$\langle Ay,z\rangle=\int_0^\pi\left(-\frac{d^2y}{dt^2}\right)zdt,$$

si $z\in\mathcal{D}(A)$, *alors on a par intégration par partie (deux fois) :*

$$\langle Ay,z\rangle=-\int_0^\pi y\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)ydt=\langle y,Az\rangle,$$

donc $A^*=A$ *et* $\mathcal{D}(A^*)=\mathcal{D}(A)$, *donc* $A^*=A$ *est auto-adjoint.*

. . . . **(1+1 pts)**

3. *Comme*

$$\langle -Ay,y\rangle_E=-\int_0^\pi\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dt\le 0,\forall y\in\mathcal{D}(-A),$$

et

$$\langle -A^*y,y\rangle_E=-\int_0^\pi\left(\frac{dy}{dt}\right)^2dt\le 0,\forall y\in\mathcal{D}(-A^*) \text{ puisque } A^*=A,$$

c'est-à-dire : $\operatorname{Re}\langle -Ay,y\rangle\le 0,\forall y\in\mathcal{D}(-A)$ *et* $\operatorname{Re}\langle -A^*y,y\rangle\le 0,\forall y\in\mathcal{D}(-A^*)$,
on déduire que $(-A)$ *est le générateur infinitésimal d' un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe* $\{\mathcal{S}(t);t\ge 0\}$.

. . . . **(1 pt)**

4. *On a :* $Ay=\lambda y\Longrightarrow -\frac{d^2y}{dt^2}=\lambda y\Longrightarrow y(t)=\alpha\exp\left(i\sqrt{\lambda}t\right)+\beta\exp\left(-i\sqrt{\lambda}t\right)$,
$y(0)=0\Longrightarrow\alpha=-\beta$ *et on a donc :* $\exp\left(i\sqrt{\lambda}t\right)-\exp\left(-i\sqrt{\lambda}t\right)=0,\forall\alpha\neq 0$,
$y(\pi)=0\Longrightarrow 2i\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0\Longrightarrow\sqrt{\lambda}=n;n\ge 0\Longrightarrow\lambda_n=n^2;n\ge 0$,
et que : $y_n(t)=\sin(nt);n\ge 0$.

. . . . ***(1+1 pt)***

On a : $\phi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|_E}$ *tel que* $\|y_n\|_E^2 = \int_0^\pi y_n^2(t)dt = \int_0^\pi \sin^2(nt)\,dt = \frac{\pi}{2}$, *c'est-à-dire :* $\phi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|_E} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nt), \forall n \geq 1$. *Donc,* $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ *est une base orthonormée, donc une base de Reisz.*

Si $n \neq m$, *alors on a :* $\lambda_n \neq \lambda_m$ *et comme* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2 = +\infty$, *donc* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *est totalement déconnéctée, donc* A *est un opérateur spectral de Reisz.*

5. *On a :*

$$\mathcal{S}(t)x = \sum_{n\geq 1} \exp\left(-n^2 t\right) \langle x, \phi_n \rangle \phi_n, \forall x \in L^2(0,\pi),$$

et

$$Ax = \sum_{n\geq 1} n^2 \left(-n^2 t\right) \langle x, \phi_n \rangle \phi_n, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

. . . . ***(0.5+0.5 pts)***

En plus, on a :

$$\|\mathcal{S}(t)x\|_E = \left\|\sum_{n\geq 1} \exp\left(-n^2 t\right) \langle x, \phi_n \rangle \phi_n\right\|_E \leq \exp(-t) \sum_{n\geq 1} \|\langle x, \phi_n \rangle \phi_n\| = \exp(-t)\|x\|,$$

donc $\|\mathcal{S}(t)\| \leq 1; \forall t \geq 0$, *c'est-à-dire* $\{\mathcal{S}(t); t \geq 0\}$ *est un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe de contraction sur* $E = L^2(0,\pi)$.

<u>Solution</u> 2 1. *En prenant pour état* $Y = (y; y')$, *on obtient* $Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$.

. . . . **(1 pt)**

2. *On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on calcul tout d'abord* e^{tA}*, on obtient :*

   $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on trouve que :*

$$\begin{aligned} G &= G(0,T) = \int_0^T e^{(T-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{(T-s)A^t} ds \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} (T-s)^2 & T-s \\ T-s & 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   comme $\det G = \frac{T^4}{3} - \frac{T^4}{4} = \frac{T^4}{12} \neq 0$ *pour chaque* $T > 0$. *Alors rang*$G = 2 = n$ *pour tout* $T > 0$, *donc le système est contrôlable.*

. . . . **(1+1+1 pts)**

3. *Soit* $\overline{y}_0 = (y_0, y_1)^t$ *et* $\overline{y}_1 = (0,0)^t$.

   Soit $\overline{u}(t) = B^t \mathcal{S}^t (1-t)\, y$.

   On a :

$$\begin{aligned} y &= G^{-1}\{\overline{y}_1 - \mathcal{S}(1)\overline{y}_0\} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} -12y_0 - 6y_1 \\ 6y_0 + 2y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Finalement

$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &= B^t \mathcal{S}^t (1-t)\, y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12y_0 - 6y_1 \\ 6y_0 + 2y_1 \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(-12y_0 - 6y_1) + 6y_0 + 2y_1 \\ &= (12t - 6)\, y_0 + (6t - 4)\, y_1, \end{aligned}$$

   est le contrôle désiré.

. . . . **(1.5+1.5 pts)**

Solution 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *et* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *On a :* $\dim(A) = 2$. *Est-ce que le rang de la matrice par block* $[B \mid AB] = 2$.

   Le rang de $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$ *puisque le déterminant n'est pas nul, alors d'après la règle de Kalman on a : la paire* (A, B) *est contrôlable.*

   .... ***(1+1 pts)***

2. *On a :* $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}$ *et* $Ce^{tA} = (1+t, -t)$.

   La matrice d'observabilité est donnée par :

$$\begin{aligned} W(0,T) &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix} (1+t, -t)\, dt = \int_0^T \begin{pmatrix} (1+t)^2 & -t(1+t) \\ -t(1+t) & t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1+T)^3-1}{3} & \frac{-5T^3}{6} \\ \frac{-5T^3}{6} & \frac{T^3}{3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   comme $\det(W(0,T)) \neq 0$ *pour chaque* $T > 0$. *Alors rang* $(W(0,T)) = 2 = n$ *pour tout* $T > 0$, *donc le système est observable.*

   .... ***(1+1+1 pts)***

3. *Alternativement, notons que la matrice du critère d'observabilité de Kalman*

$$W = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   et rang $(W) = 2 = n$, *donc le système est observable.*

   .... ***(1+1 pts)***

   I. Rezzoug