5 Continuité et uniforme continuité

Etant donné deux ensembles X et Y, on note $\mathcal{F}(X,Y)$ l'ensemble de toutes les applications de X dans Y.

5.1 Continuité

Définition 11 *Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et soit $a \in X$. On dit qu'une application $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ est continue au point a si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : \quad f(B(a,\alpha)) \subset B(f(a),\varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in X : \quad x \in B(a,\alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon),$$

soit de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in X : \quad d(a,x) < \alpha \Rightarrow d'(f(a),f(x)) < \varepsilon. \tag{6}$$

Exemple 17 On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. *La fonction indicatrice* de l'ensemble $\mathbb{Q}$, $f = 1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ (*Prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et raisonner pour $a \in \mathbb{Q}$ puis $a \notin \mathbb{Q}$*).

Proposition 19 *Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques, $a \in X$ et $f \in \mathcal{F}(X,Y)$. Les 2 assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est continue en a.*

ii) *f est séquentiellement continue en a.*

Preuve. Conséquence immédiate de la proposition 24 du chapitre 1 jointe à la proposition 12. ■

Remarque 2 L'implication **i**) $\Longrightarrow$ **ii**) a la conséquence suivante :
Si $(x_n)_n \subset (X,d)$ est une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ avec $f \in \mathcal{F}(X,X)$, si ℓ est la limite de $(x_n)_n$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
En effet, grâce à le continuité de f en ℓ, on écrit :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\ell).$$

Proposition 20 *Soient d et d' deux distances sur X ; alors*

1. *d est plus fine que d' si et seulement si* id : $(X,d) \to (X,d')$ *est continue.*
2. *d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identique* id : $X \to X$ *est un homéomorphisme de (X,d) sur (X,d').*

5.2 Uniforme continuité

Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques. La continuité d'une application $f : X \to Y$ sur X s'écrit

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x' \in X : \quad d(x,x') < \alpha \implies d'(f(x),f(x')) < \varepsilon.$$

Le $\alpha > 0$ dépend à la fois de $\varepsilon > 0$ et du point $x \in X$ où l'on teste la continuité, autrement dit, on a $\alpha = \alpha(x,\varepsilon)$. L'uniforme continuité signifie que l'on peut choisir α indépendant de $x \in X$.

Définition 12 *Une application $f : (X,d) \to (Y,d')$ est dite uniformément continue sur X si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ \forall x,x' \in X : \quad d(x,x') < \alpha \implies d'(f(x),f(x')) < \varepsilon.$$

Exemple 18 On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle.

- L'application identique $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue. En effet, à $\varepsilon > 0$, on peut prendre $\alpha = \varepsilon$).
- L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. En effet, si on choisit $\varepsilon = 1$ et on considère pour tout $\alpha > 0$ les nombres $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x' = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{2}$ on obtient $|x - x'| = \dfrac{\alpha}{2} < \alpha$ alors que $|f(x) - f(x')| = \left|x^2 - x'^2\right| = 1 + \dfrac{\alpha^2}{4} > 1 = \varepsilon$.

Un type intéressant d'applications uniformément continues est introduit dans la

Définition 13 *On dit que $f : (X,d) \to (Y,d')$ est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur X si :*

$$\forall x,x' \in X : \quad d'(f(x),f(x')) \leq k\, d(x,x').$$

Si $k \in [0,1[$, on dit que f est contractante.

On vérifie immédiatement les implications

Proposition 21 *f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue.*

Preuve. Pour la première implication, prendre $\alpha = \varepsilon/k$. La seconde est évidente. ∎

Exemple 19 L'application identique $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,d)$ est lipschitzienne (de rapport 1) et donc uniformément continue.

Exemple 20 Sur $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, la fonction arctan est lipschitzienne (de rapport 1) et donc uniformément continue. En effet,

$$\left|\arctan x - \arctan x'\right| = \frac{1}{1+c^2}\left|x - x'\right| \leq \left|x - x'\right|$$

où c, compris entre x et x', est donné par le théorème des accroissements finis.

Exemple 21 Sur un espace métrique (X,d), pour tout $a \in X$, l'application $d(a,\cdot) : x \mapsto d(a,x)$ de X dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne (de rapport 1) et donc uniformément continue puisque :

$$\forall x, x' \in X : \quad \left| d(a,x) - d(a,x') \right| \leq d(x,x').$$

Exemple 22 Soit $A \subset X,\ A \neq \varnothing$, l'application $d(\cdot, A) : x \mapsto d(x,A)$ de X dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue car lipschitzienne (de rapport 1) d'après la relation

$$\forall x, x' \in X : \quad \left| d(x,A) - d(x',A) \right| \leq d(x,x').$$

Exemple 23 Si on munit l'ensemble produit $X \times X$ de la distance

$$D_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}$$

alors l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne (de rapport 2) et donc uniformément continue.

Définition 14 *Une application $f : (X,d) \to (Y,d')$ est dite une <u>isométrie</u> si pour tous $x, x' \in X$ on a $d'(f(x), f(x')) = d(x,x')$.*
Une isométrie est toujours injective. Si de plus, elle est surjective (et donc bijective), son application réciproque est aussi une isométrie bijective. (X,d) et (Y,d') sont alors dits <u>isométriques</u>.

Une isométrie est uniformément continue car lipschitzienne (de rapport 1).

Proposition 22 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité) *Soit (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Il y équivalence entre :*

1. *f est uniformément continue sur X*
2. *Pour toutes suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de X, on a*

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} d'(f(u_n), f(v_n)) = 0.$$

Cette proposition est surtout utile pour prouver qu'une application n'est pas uniformément continue.

Exemple 24 L'application $]0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$, mais elle n'est pas uniformément continue. Prenons les suites $u_n := \frac{1}{n}$ et $v_n := \frac{1}{n+1}$. On a $|u_n - v_n| = \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mais $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{v_n} \right| = |n - (n+1)| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Proposition 23 *Soit $f : (X,d) \to (Y,d')$ et $g : (Y,d') \to (Z,d'')$ deux applications uniformément continues, f sur X et g sur Y. La composée $h = g \circ f : (X,d) \to (Z,d'')$ est une application uniformément continue sur X.*

Proposition 24 *Une application uniformément continue $f : (X, d) \to (Y, d')$ transforme toute suite de Cauchy dans X en une suite de Cauchy dans Y, i.e. si $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X, alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans Y.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de l'uniforme continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in X : \quad d(x, x') \leq \alpha \implies d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon,$$

et compte tenu du fait que $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe pour cet $\alpha > 0$, un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m, n \geq N : \quad d(x_m, x_n) \leq \alpha.$$

Par suite

$$\forall m, n \geq N : \quad d'(f(x_m), f(x_n)) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y. ■

6 Espaces métriques complets

Nous avons vu qu'il existe en général des suites de Cauchy qui ne convergent pas. Un espace métrique complet est un espace métrique où toute suite de Cauchy converge.

Définition 15 *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

L'intérêt évident de cette notion réside dans le fait que, dans un tel espace, pour montrer qu'une suite est convergente il suffit d'établir qu'elle vérifie la propriété de Cauchy, ce qui ne suppose pas que l'on connaisse la limite.

Dans les propositions suivantes, on présente quelques exemples et contre-exemples fondamentaux.

Proposition 25 *Muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.*

Preuve. La suite de nombres rationnels $x_n = \dfrac{\left[2^n\sqrt{2}\right]}{2^n}$ est de Cauchy mais ne converge pas. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n\sqrt{2} - 1}{2^n} < x_n \leq \frac{2^n\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2},$$

d'où $x_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, (x_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Proposition 26 $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle est complet.*

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$ (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Mais alors la proposition 18 donne la convergence de toute la suite. ■

Proposition 27 *Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On munit l'espace $X_1 \times X_2$ d'une distance produit. Alors, $X_1 \times X_2$ est complet si et seulement si X_1 et X_2 sont complets.*
Plus généralement, si $(X_k, d_k)_{k=1,...,n}$ est une famille finie d'espaces métriques, alors l'espace métrique produit $\prod_{k=1}^n X_k$ est complet si et seulement si X_k est complet pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

En particulier,

Corollaire 3 *Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est un espace complet pour l'une quelconque des distances principales.*

Proposition 28 *Si X est un ensemble et (Y, d) est un espace métrique **complet**, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 29 *Pour tout intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $C([a, b], \mathbb{R})$ est un espace complet pour la distance d_∞ de la convergence uniforme :*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| .$$

Preuve. Laissée en exercice. ■

Remarque 3 Pour établir la complétude d'un espace métrique X, on prend une suite de Cauchy arbitraire dans X et on montre qu'elle converge dans X. La démonstration se déroule en trois étapes suivant le schéma général suivant :

1. Identifier une limite possible pour la suite de Cauchy (souvent en utilisant un résultat de complétude connu).
2. Vérifier que cette limite éventuelle est bien dans l'espace considéré X.
3. Vérifier que la suite converge bien vers cette limite pour la distance en question.

   Pour 2) et 3) il faut faire attention aux dépendances par rapport à ε (et x pour des espaces de fonctions).

Proposition 30 *Pour tout intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ n'est pas complet pour la distance d_1 de la convergence en moyenne :*

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Preuve. Laissée en exercice. ■

Le théorème suivant présente une caractérisation imporante des espaces métriques complets (généralise la propriété des intervalles emboîtés dans $\mathbb{R}$).

Théorème 3 (des fermés emboîtés) *Soit (X,d) un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *(X,d) est complet.*

ii) *Pour toute suite **décroissante** (pour l'inclusion) $(F_n)_{n\geq 0}$ de **fermés non vides** de X telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$, l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ des F_n est un singleton.*

Proposition 31 *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X,\ A \neq \varnothing$.*

i) *Si (A, d_A) est complet, alors A est un fermé de X.*

ii) *Réciproquement, si A est un fermé de X et X est **complet**, alors (A, d_A) est complet.*

Ainsi, **dans un espace métrique complet :**

$$A \textbf{ complet} \iff A \textbf{ fermé}.$$

Proposition 32 *Soit (X,d) un espace métrique.*

1. *Une intersection **quelconque** de parties complètes de (X,d) est complète.*
2. *Une union **finie** de parties complètes de (X,d) est complète.*
3. *Si toutes les parties fermées et bornées sont complètes, alors X est complet.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 33 *Soit $f : (X,d) \to (Y,d')$ un homéomorphisme **uniformément continu**. Si (Y,d') est complet, l'espace (X,d) l'est aussi.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X, alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y en raison de l'uniforme continuité de f. Comme Y est complet, $(f(x_n))_n$ est convergente. Il en résulte, grâce à la continuité de l'application inverse f^{-1}, que $(x_n)_n$ est convergente dans X (observer que $x_n = f^{-1}(f(x_n))$). ■

Corollaire 4 *Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques. Soit f une bijection de X sur Y, uniformément continue, ainsi que son inverse. Si l'un des espaces $X,\ Y$ est complet, l'autre l'est aussi.*

En particulier, on a :

Corollaire 5 *Si (X,d) et (Y,d') sont isométriques et si l'un d'eux est complet, l'autre l'est aussi.*

Preuve. Il suffit de remarquer que toute isométrie bijective est uniformément continue ainsi que son inverse. ■

Exemple 25 $\mathbb{C}$ muni de la distance usuelle est complet *(On pourra montrer que l'application* $(x, y) \mapsto x + iy$ *est une isométrie de* $\mathbb{R}^2$ *muni de la distance euclidienne* d_2 *sur* $\mathbb{C}$*).*

Corollaire 6 *Si d et d' sont deux distances métriquement équivalentes sur un ensemble X, alors on a l'équivalence*

$$(X, d) \text{ complet } \iff (X, d') \text{ complet.}$$

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 34 (Prolongement par l'uniforme continuité) *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, D une partie dense de X et $f : D \to Y$ une fonction uniformément continue. Si Y est* ***complet****, alors f admet un prolongement continu unique à X, et ce prolongement est uniformément continu.*

Remarque 4 Dans la proposition ci-dessus, la condition *"f uniformément continue sur D"* est essentielle, comme le montre l'exemple suivant :
L'application $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ et non uniformément continue. Elle n'admet pas de prolongement continu à $[0, 1]$.

Point fixe de contraction. Beaucoup de problèmes concernant l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles (ou algébriques) peuvent être ramenés à des problèmes d'existence et d'unicité de points fixes de certaines applications. Le théorème suivant présente un résultat très important dans ce domaine.

Théorème 4 (du point fixe de contraction de Banach-Picard) *Soit (X, d) un espace métrique* ***complet****. Si l'application $f : X \to X$ est* ***contractante*** *de rapport k, alors elle admet un unique point fixe $x^* \in X$, $f(x^*) = x^*$.*
De plus, toute suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ converge vers x^*, et l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x^*) \leq k^n \, d(x_0, x^*) \qquad \text{et} \qquad d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} \, d(x_0, x_1). \tag{7}$$

Remarque 5 La condition "X *complet*" est essentielle, en ce sens que si (X, d) n'est pas complet alors la conclusion du théorème n'est pas nécessairement vérifiée. C'est par exemple le cas pour $X =]0, 1[$, $f(x) = \dfrac{x}{2}$. En effet, f est contractante de rapport $\dfrac{1}{2}$, mais f n'admet aucun point fixe dans $]0, 1[$.

Remarque 6 De même, la condition "$0 \leq k < 1$" est également essentielle. En effet, l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

est lipschitzienne de rapport $k = 1$, et on peut vérifier aisément qu'elle n'admet aucun point fixe dans $\mathbb{R}$.