TD 02 : Fonctions Numériques :

Excercice 01 : Déterminer le domaine de définition des fonctions f définies de la façon suivante :

a) $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2+3x+2}$; b) $f(x) = \sqrt{x} + 2$; c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$; e) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

Excercice 02 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 2x + 10$; 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} -4x^3 + 5x - 2$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+4}{x^2+x+1}$; 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-8x^3+1}{4x+16}$; 5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$; 7) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$; 10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$

Excercice 03 :

Montrer que l'équation

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0$$

admet une solution unique sur $\left[\frac{3\pi}{4} ; \pi\right]$

On a : $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Excercice 04 :

I] Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in [-1 ; 0[\\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0 ; 3] \end{cases}$$

i) aux points $x_0 = -1$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

ii) sur son domaine de définition.

II] Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \le 0 \\ \sin x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 1 + \cos x & \text{si } x > \pi \end{cases} ;$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

III] Peut-on prolonger par continuité au point x_0 les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \; ; \; x_0 = 0$$

$$f_2(x) = \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1} \; ; \; x_0 = -1$$

Exercice 05 :

Appliquer le Théorème de Rolle à la fonction définie par :

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1 \quad \text{ds } [0 ; \pi]$$

puis déduire que l'équation

$$\sin x + \cos x = 0$$

admet au moins une solution dans $]0 ; \pi[$