Chapitre 04 : Equations différentielles

I) Définitions et notions de base :

Définition 01 : Equation différentielle

Une équation différentielle est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \longmapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \dots (1.1)$$

On notera par abus $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

(N.B : on pourra utiliser x de temps en temps au lieu de t, i.e. $y(t)$ ou $y(x)$)

▶ L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation

Exemples :

① $y' + y = 3x^2$ E.D d'ordre 1 et de degré 1

② $3y^{(3)} + 2(\sin x)y''y = (3x^2)y$ ED d'ordre 3 et de degré 1

③ $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ ED d'ordre 2 et de degré 1.

④ $(y'')^3 + xy' + x^2y^3 = e^x \sin x$ ED d'ordre 2 et de degré 3.

Définition 02 : Equation différentielle normale :

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \dots (1.2)$$

Exemple : Equation du premier ordre sous la forme normale

$$y' = f(t, y) \quad \left(\text{ou } \frac{dy}{dt} = f(t, y) \right)$$

Définition 03 : Equation différentielle linéaire

Une équation différentielle du type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle a la forme suivante :

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = g(t) \quad \dots\dots (1.3)$$

- Si $g(t) = 0$, l'équation différentielle (1.3) est homogène.

Définition 04 : Solution :

On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I. On notera en général cette solution (y, I).

II / Equations différentielles linéaires du premier ordre :

Définition 04 :

Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y'. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = g(t) \quad \dots\dots (2.1)$$

- Si $g(t) = 0$, l'équation (2.1) est dite équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.
- Si a et b sont deux fonctions constantes, on appelle l'équation (2.1) une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

Exemples :

1. $x^2 y' + \dfrac{y}{x} = e^x$ ED linéaire du 1^{er} ordre avec second membre.

2. $y' + y^2 = 1$ ED non linéaire

③ $y' + y + x = 0$ ED linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants avec second membre

④ $x y' + y = \frac{y}{x}$ ED linéaire du 1^{er} ordre sans second membre.

Solution d'une équation linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants sans second membre :

Il s'agit d'une équation de la forme

$$a y' + b y = 0 \quad \text{---} (2.2)$$

Proposition : L'ensemble des solutions de (2.2) sur le domaine I est définie pour tout $t \in I$ par :

$$y(t) = c e^{-\frac{b}{a} t} \quad , \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Preuve : En classe.

Exemple 01 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) - 3y(x) = 0$$

Exemple 02 : Résoudre l'équation différentielle :

$$2y'(x) = -5y(x)$$

Solution d'une équation linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants avec second membre :

Il s'agit d'une équation de la forme

$$y' + a y = b \; ; \text{ où } a \neq 0 \quad \text{---} (2.3)$$

Proposition : L'ensemble des solutions de (2.3) sur le domaine I est définie pour tout $t \in I$ par :

$$y(t) = K e^{-at} + \frac{b}{a}, \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Exemple 01 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 4$$

Exemple 02 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = 2y + 3 .$$

* Unicité de la solution sous condition initiale :

Propriété (Cauchy-Lipschitz) :

Soient t_0, y_0, b et $a \neq 0$ des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution y dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(t_0) = y_0$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle,

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}y = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Les solution de cette équation différentielle sont de la forme

$$y(t) = Ke^{+\frac{1}{2}t} - 4 ,$$

où k est une constante réel. On obtient une infinité de solution, Parmi toutes ces solutions, il existe une seule solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 \iff ke^{\frac{1}{2}\times 0} - 4 = 1$$

$$\iff ke^{\frac{1}{2}\times 0} = 5$$

$$\iff k = 5$$

D'où $y(t) = 5e^{\frac{1}{2}t} - 4$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III / Equations différentielles linéaires du second ordre :

Définition : Une équation différentielle du deuxième ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée première y' et par rapport à sa dérivée deuxième y''. Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = g(t) \quad \text{---} (3.1)$$

- si $g(t) = 0$, l'équation (3.1) est dite équation différentielle linéaire du deuxième ordre sans second membre.
- Si a, b et c sont des fonctions constantes, on appelle l'équation (3.1) une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants.

Solution d'une équation linéaire du 2ème ordre à coefficients constants sans second membre :

Il s'agit d'une équation de la forme :

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad \text{---} (3.2)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

1. $y = 0$ (fonction nulle) est toujours une solution de (3.2)
2. Si y est une solution et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αy est aussi une solution
3. si y_1 et y_2 sont deux solutions, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution.

Définition : On appelle l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants sans second membre (3.2), l'équation :

$ar^2 + br + c = 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$: Le discriminant.

La solution générale de l'équation (3.2) est donnée par :

Δ	Les racines de l'équation caractéristique	La forme des solutions
$\Delta > 0$	$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$r_0 = \frac{-b}{2a}$	$y = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$ avec : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$	$y = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] e^{\alpha x}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Exemples : Résoudre les équations différentielles :

1) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

2) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

3) $y''(t) + 4y(t) = 0$