Fonctions Numériques

A- / Ensemble de définition d'une fonction :

1- / Définition :

Soit f : A → B une fonction. On appelle ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, l'ensemble des éléments x de A qui ont une image dans B par f.

2- / Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions définies par.

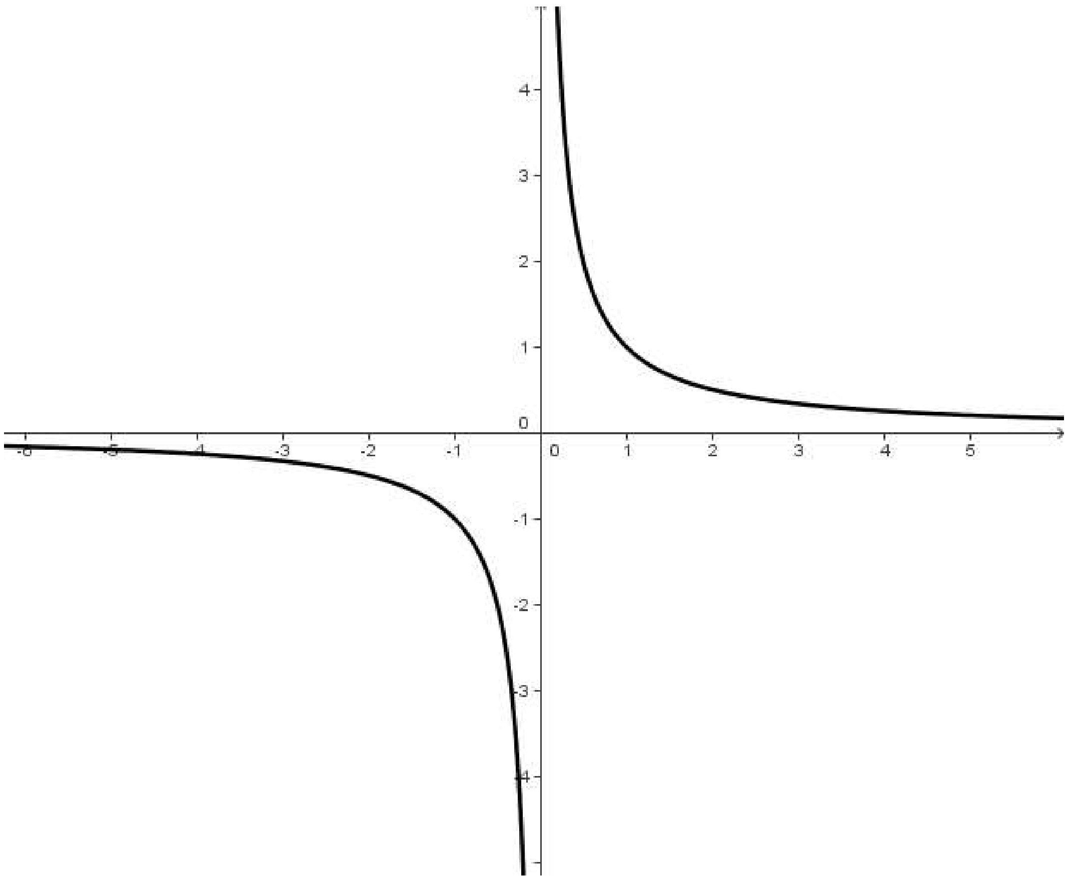
a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 9$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$; c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-5}$;

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

B- / Limites :

I- / Approche graphique :

La fonction f est donnée par sa courbe représentative ci-dessous.



1-/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2-/ Trouver $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

II-/ Calcul de limites :

1-/ Limites obtenues directement ou par transformation de l'expression :

a/ Fonctions Polynômes :

- **Théorème 1 :** À l'infini toute fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.
- **Exemples :** Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+2x^2-5x+9$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3-3x^2+x+4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^4-5x^3+4x^2-8x+1$

b/ Fonctions Rationnelles :

- **Théorème 2 :** À l'infini toute expression se présentant sous la forme d'une fraction a même limite que le rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- **Exemples :** Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+6x-7}{4x^2-5x+2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2+7x-8}{x^2+9x-7}$; $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x^2+2x-4}{x^3+2x^2-5x+2}$

c/ Fonctions Irrationnelles :

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions puis calculer les limites suivantes.

* $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$; **

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+1-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+1-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

d-/ Fonctions Trigonométriques :

Retenons que pour x très voisin de zéro on a : sinx = x d'où

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}=1$; *pour* $a\neq0$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin ax}{ax}=1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x}=0$

Exercices : Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$; *pour* $\alpha\neq0$ *et* $\beta\neq0$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin\alpha x}{\beta x}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

2-/ Limites obtenues par changement de variables :

Exemple : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$; *en posant* $x-\dfrac{\pi}{6}=u$ *on obtient* $Rép=-\sqrt{3}$

3-/ Limites obtenues par encadrement :

a) Si f(x) $\leq$ g(x) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

b) Si f(x) $\leq$ g(x) et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

c) Exemple :

Soit $f : x \mapsto f(x) = x + 3\cos x$.

Pour tout réel x on a : $x - 3 \leq f(x) \leq x + 3$.

- $x - 3 \leq f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-3) \leq \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
- $f(x) \leq x + 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4-/ Théorème des gendarmes :

Soient f ; g *et* h trois fonctions telles que :

$\forall x \in]a;b[$ si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ *Alors* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Exemple : Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2 + 1} \right) \Leftrightarrow -1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\sin 3x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2+1} \right) = 0$$

5-/ Utilisation de la dérivée dans le calcul des limites :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

b) Exemples

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$$

C- / Continuité d'une fonction f :

1– Continuité en un point d'abscisse x_0 :

a) Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $f(x_0)$ est définie et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\left(\begin{matrix} f \ \ \textit{est} \ \ \textit{continue} \ \ \textit{au} \ \ \textit{point} \\ x_0 \ \ \textit{de} \ \ D_f \end{matrix} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \bullet \ f(x_0) \ \ \textit{définie} \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{matrix} \right)$$

b) Exemple :

– Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{2x}$. La fonction f est-elle continue en x_0=1 ? ; en x_0=0 ?

– Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
- f est-elle continue en $x_0 = 2$?.

2– Prolongement par continuité en un point :

a) Définition :

$$\left(\begin{matrix} f \ \ \textit{est} \ \ \textit{prolongeable par} \\ \textit{continuité} \ \ \textit{au} \ \ \textit{point} \ \ x_0 \end{matrix} \right) \ \textit{si et seulement, si} \ \left(\begin{matrix} \bullet \ x_0 \notin Df \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \ , \ l \in IR \end{matrix} \right)$$

Son prolongement est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

b) Exemple et contre exemple :

– Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$; f est-elle prolongeable par continuité en x_0 =1 ? si oui déterminer son prolongement g.

– Soit f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?.

3– Continuité d'une fonction sur un intervalle I = [a ;b] :

Une fonction f est continue sur I = [a ; b] , si elle est continue en tout point de I = [a ; b].

4– Théorème 3:

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

5– Théorème 4 :

Si f et g sont deux fonctions respectivement continue en x_0 ; alors les fonctions $(f+g)$; $(f-g)$; $(f\times g)$; (λf) $(\lambda\in IR)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ $si\quad g(x)\neq 0$

sont continues en x_0.

Théorème 0.1. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a,b]$.
Si

1. *f est continue sur $[a,b]$.*
2. *$f(a).f(b)<0$.*

alors $\exists c\in\,]a,b[$ *telque* $f(c)=0$.
*Si de plus f est strictement croissante (strictement décroissante) sur $[a,b]$ alors c est **unique**.*

D- / Dérivée d'une fonction numérique :

1- Fonction dérivable en un point :

a) Définition : On dit qu'une fonction f est dérivable au point d'abscisse x_0 (ou admet un nombre dérivé au point x_0) de son ensemble de définition si et seulement, si : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$; $(A\in IR)$. A est noté $f'(x_0)$ et est appelé le nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

b) Exemples :

Etudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants

- $f(x)=x^2+2x-1$ *et* $x_0=2$;
- $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ *et* $x_0=-1$

4- Techniques de dérivation :

a) Formules de dérivation :

Soient $f\,;u\ et\ v$ des fonctions dérivables en un point x de l'intervalle I.

Fonction f définie par	Fonction dérivée $f\,'$ définie par
$f(x)=c$	$f\,'(x) = 0$
$f(x)=x$	$f\,'(x) =1$
$f(x)=ax$	$f\,'(x) = a$
$f(x)=x^n$	$f\,'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x)=ax^n$	$f\,'(x) = an\,x^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f\,'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u = f^n$	$u\,' = \left(f^n\right)'=n\times f^{n-1}\times f\,'$
$f=u+v$	$f\,' =(u+v)'=u\,'+v\,'$
$f=u\times v$	$f\,'=(u\times v)'=u\,'v+v\,'u$
$f=\frac{u}{v}$	$f\,'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u(x)}$	$f\,'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x)=u(ax+b)$	$f\,'(x)=a\times u'(ax+b)$

b) Dérivées de fonctions circulaires :

$f(x)=\sin x$	$f\,'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f\,'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f\,'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f\,'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=tgx$	$f\,'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$
$f(x)=\cot gx$	$f\,'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\cot g^2x)$

Théorème 0.2. *(Théorème de Rolle)*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.
Si

1. *f est continue sur $[a, b]$.*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$.*
3. *$f(a) = f(b)$.*

alors, $\exists c \in \,]a, b[$ *telque* $f'(c) = 0$.

Théorème 2 (des accroissements finis)
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$ vérifiant :

- *f est **continue** sur le **segment** $[a, b]$;*
- *f est **dérivable** sur l'**intervalle ouvert** $]a, b[$,*

il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).}$$

F-/ Dérivabilité et continuité :

1- Théorème 6 : (admis)

Si une fonction numérique est dérivable en un point, elle est continue en ce point.
Par contre, une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

2- Exemple : $f : x \mapsto f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$, **mais pas dérivable en x = 0.**