Chapitre 03 : les matrices

1- Définition

- Une matrice m × n est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes.
- Les nombres qui composent la matrice sont appelés les coefficients.
- On note a_{ij} le coefficient de i éme ligne et j éme colonne que ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$)
- La dimension de la matrice est m× n

$$A= \begin{matrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \cdots & \boldsymbol{a_{1j}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \cdots & \boldsymbol{a_{2j}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \cdots & \boldsymbol{a_{3j}} \end{matrix}$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{2} & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice de 3 lignes et 2 colonnes

$a_{12} = 4$, $a_{32} = 7$, $a_{22} = 5$

2- Les types des matrices

- **Matrice carrée :** si m=n (nbr des lignes = nbr colonnes)

Exemple : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

- **Matrice nulle :** tous les éléments sont nuls

Exemple : $A= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matrice colonne :** qui n'a qu'une seule colonne (n=1)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

- **Matrice lignes : qui n'a qu'une seule ligne (n=1)**

Exemple : $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- **Matrice triangulaire supérieure** : est une matrice carrée tel que i > j (a_{ij}= 0)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

- **Matrice triangulaire inferieure :** est une matrice carrée tel que i < j (a_{ij}= 0)

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- **Matrice diagonale :** est une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

- **Matrice identité :** est une matrice carrée dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3- Les opérations sur les matrices

- **Addition des matrices :** soient A et B deux matrices ayant la même taille m× n . Leur somme C = A +B est la matrice de taille m × n définie par : $\boldsymbol{C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

  $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

- **Soustraction des matrices :** soient A et B deux matrices ayant la même taille m × n . leur soustraction C = A – B est la matrice de m × n définie par : $\boldsymbol{C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}$

  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- **Produit d'une matrice par un scalaires :** le produit d'une matrice A = (a_{ij}) par un scalaire β est la matrice $(\beta\ a_{ij})$ formée en multipliant chaque coefficient de A par β , est βA

Exemple : **A =** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\beta = 2$

- **Multiplication de matrice :** soient A = (a_{ij}) une matrice n × p et B = (b_{ij}) une matrice

  p × q alors le produit C = AB est une n × q dont les coefficients

  $\boldsymbol{C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{ip}b_{pj}}$

  Exemple : **A =** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  AB = $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

- **Puissance d'une matrice :** on définit les puissances successives de A par :

  $A^p = A \times A \times A$ n fois .

  Exemple : soit A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^3