FEUILLE DE TD N°2

Exercice 1 *Soit $X =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in X$, on note*

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

1. *Montrer que d est une distance sur X.*
2. *L'espace métrique (X, d) est-il complet ? (Indication. On pourra considérer la suite réelle de terme général $x_n = n$).*

Exercice 2 (Construction de distances) *On appelle **jauge** une application $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante, ne s'annulant qu'en 0 et sous-additive (i.e. $\varphi(s+t) \leq \varphi(s)+\varphi(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$).*

1. *Soit (X, d) un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une jauge. Montrer que $d' = \varphi \circ d$ est une distance sur X.*
2. *Application. En déduire que*

$$d_1 = \frac{d}{1+d}, \qquad d_2 = \min\{1, d\}, \qquad d_3 = \ln(1+d), \qquad \text{et} \qquad d_4 = d^\alpha \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

sont des distances sur X.

3. *Montrer que d et $d' = \varphi \circ d$ sont métriquement équivalentes s'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que*

$$C^{-1}t \leq \varphi(t) \leq Ct, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 3 *Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles non vides de X. Montrer que :*

1. $\forall x, y \in X : \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$,
2. $\forall x \in X : \quad x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$,
3. $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

Exercice 4 (Distance de la convergence uniforme) *Soit X un ensemble non vide quelconque et soit (Y, d) un espace métrique. On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to Y$ qui sont bornées, c'est-à-dire qui vérifient :* $\operatorname{diam}[f(X)] < +\infty$.

Pour $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$, on note

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

1. *Montrer que d_∞ est une distance sur $\mathcal{B}(X,Y)$.*

2. *Montrer que $(\mathcal{B}(X,Y),d_\infty)$ est un espace complet si (Y,d) est complet.*

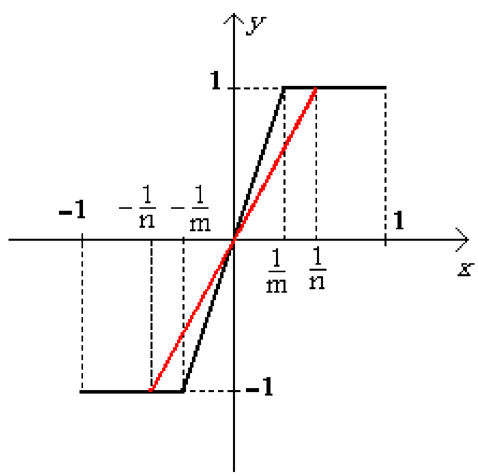
Exercice 5 *Montrer que pour tout intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace complet pour la distance de la convergence uniforme d_∞.*

Exercice 6 *Soit $C([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit $C([-1,1],\mathbb{R})$ de la distance d_1 définie par*

$$d_1(f,g)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx.$$

On va montrer que $C([-1,1],\mathbb{R})$ muni de cette distance n'est pas complet. Pour cela, on considère la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies par

$$f_n(t)=\begin{cases}-1 & \textit{pour } x\in[-1,-1/n]\,,\\ nx & \textit{pour } x\in[-1/n,1/n]\,,\\ 1 & \textit{pour } x\in[1/n,1]\,.\end{cases}$$



1. *Vérifier que $f_n\in C([-1,1],\mathbb{R})$ pour tout $n\geq 1$.*

2. *Montrer que pour tous $n,m\geq 1$:*

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leq 2,\ \forall x\in[-1,1]\,.$$

En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.

3. *Supposons qu'il existe une fonction $f\in C([-1,1],\mathbb{R})$ telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $(C([-1,1],\mathbb{R}),d_1)$. Montrer qu'alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(x)-f(x)|\,dx=0$$

pour tout $0<\alpha<1$.

4. Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(x)+1|\,dx=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(x)-1|\,dx=0$$
pour tout $0<\alpha<1$.

5. En déduire que
$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,0[\,,\\ 1, & x\in\,]0,1]\,.\end{cases}$$
Conclure.

Exercice 7 *Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que*

1. *Une intersection quelconque de parties complètes de (X,d) est complète.*
2. *Une union finie de parties complètes de (X,d) est complète.*
3. *Si toutes les parties fermées et bornées sont complètes, alors X est complet.*

Exercice 8 *Soit d et d' deux distances métriquement équivalentes sur un ensemble X. Montrer que :*

1. *(X,d) est complet si et seulement si (X,d') est complet.*
2. *(X,d) et (X,d') possèdent les mêmes parties bornées.*
3. *(X,d) et (X,d') possèdent les mêmes suites convergentes et les mêmes suites de Cauchy.*

Exercice 9 (Théorème du point fixe et résolution de système) *On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance d_1 :*
$$d_1\left((x,y),(x',y')\right)=|x-x'|+|y-y'|\,.$$
et on définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y)=\left(\frac{1}{4}\sin(x+y),1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

1. *Démontrer qu'il existe une constante $k\in\,]0,1[$ telle que, quels que soient (x,y), $(x',y')\in\mathbb{R}^2$, on a*
$$d_1\left(f(x,y),f(x',y')\right)\le k\;d_1\left((x,y),(x',y')\right).$$
2. *En déduire que le système*
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sin(x+y)&=x\\ 1+\tfrac{2}{3}\arctan(x-y)&=y\end{aligned}\tag{S}$$
admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.