Série 1

Rappels on Analyse matricielle

Exercice 1 :

Soient A,B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer [A] + [B] et [A] - [C].
2. Prouver que $A^2 = 2I_3 - A$.
3. Montrer que $DB = DC$.
4. En déduire que A est inversible et Calculer A^{-1}.
5. La matrix D peut être inversible ? justifier ta réponse.
6. Déterminer toutes les matrices F telles que $DF = 0_3$ ou 0_3 est la matrice nulle.
7. Soient A et B deux matrices carrée $n \times n$ telles que $DB = D + I_n$, Montrer que A est inversible et déterminer son inverse

Exercice 2:

Pour ω ϵ ℝ, on introduit la matrice suivante, Dite matrice de Rotation :

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} Cos\ \omega & -Sin\ \omega \\ Sin\ \omega & Cos\ \omega \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $A(\omega_1).\, A(\omega_2) = A(\omega_1 + \omega_2)$ pour tous ω_1 et ω_2 ϵ ℝ.
2. En déduire que $A(\omega_1)$ est inversible pour tous ω ϵ ℝ et préciser son inverse.
3. Calculer $(A(\omega))^n$ for n ϵ ℕ.

Exercice 3:

En examinant la suite (μ_n) considérée, elle est définie comme suit :

$$\begin{cases} \mu_0 = a, \mu_1 = b, \mu_2 = c \\ \mu_{n+3} = 2\mu_{n+2} + \mu_{n+1} - 2\mu_n \end{cases}$$ avec *a*,*b et c* sont des Réels quelconques.

1. En supposez qu'il existe deux matrice A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et pour tout n ϵ ℕ, $B_n = \begin{bmatrix} \mu_{n+2} \\ \mu_{n+1} \\ \mu_n \end{bmatrix}$.
   - Déterminer la relation entre B_{n+1} et B_n.
   - En déduire que pour n ϵ ℕ $B_n = A^n \cdot B_0$.
2. En supposez qu'il existe un autre matrice C ou $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   - Vérifier que C est inversible et calculer son inverse C^{-1}.
   - On pose $F = C^{-1}AC$, Trouver F^n.
   - Montrer que pour tout n ϵ ℕ, $A^n = C \cdot F^n \cdot C^{-1}$.
3. En déduire A^n pour tout n ϵ ℕ
4. En déduire l'expression explicite de la suite μ_n en fonction de *a*,*b*,*c et n* pour tout n ϵ ℕ.