Chapitre II

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Objectif du chapitre

- *Résolution des systèmes linéaires AX = B en utilisant les méthodes directes :*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Gauss-Elimination pour A quelconque;*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Gauss-Jordan pour A quelconque;*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Cholesky pour A symétrique définie positive.*
- *Résolution des systèmes linéaires AX = B en utilisant les méthodes itératives:*
  - ✓ *Méthode (Algorithme) de Jacobi*

Introduction

Une grande partie de l'algèbre linéaire tourne autour de la résolution et de la manipulation des types les plus simples d'équations qui existent : les équations linéaires.

> Une équation linéaire en **n variables x1, x2**, ..., xn est une équation qui peut être écrite sous la forme :
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$
>
> où ***a1, a2, ...***, an et b sont des constantes appelées les coefficients de l'équation linéaire

Par exemple, les équations suivantes sont toutes linéaires :

$$\begin{array}{cccc} x+3y=4, & 2x-\pi y=3, & & 4x+3=6y, \\ \sqrt{3}x-y=\sqrt{5}, & \cos(1)x+\sin(1)y=2, & \text{and} & x+y-2z=7. \end{array}$$

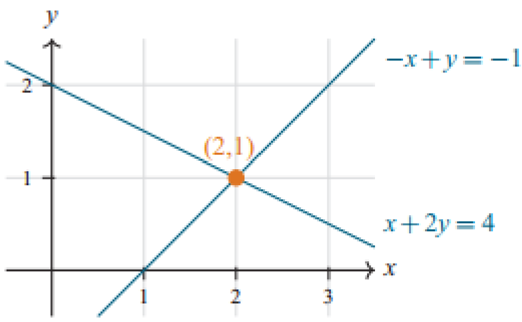
Souvent, nous souhaitons résoudre plusieurs équations linéaires en même temps. C'est-à-dire, nous voulons trouver des valeurs pour les variables x1, x2, ..., xn de telle sorte que plusieurs équations linéaires différentes soient toutes satisfaites simultanément. Cela nous amène naturellement à considérer les systèmes d'équations linéaires :

> 'Un système d'équations linéaires (ou un système linéaire) est un ensemble fini d'équations linéaires, chacune ayant les mêmes variables **x1, x2, ..., xn.** De plus,
>
> - Une solution d'un système d'équations linéaires est un vecteur **x** = **(x1, x2, ..., xn)** dont les composantes satisfont toutes les équations linéaires du système, et
> - L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est l'ensemble de toutes les solutions du système.

Géométriquement, une solution d'un système d'équations linéaires correspond à un point d'intersection de toutes les lignes, plans ou hyperplans définis par les équations linéaires du système. Par exemple, considérez le système linéaire suivant composé de deux équations :

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ -x+\ y&=-1 \end{aligned}$$

Les lignes définies par ces équations sont tracées dans la Figure 2.2. Sur la base de ce point, ces lignes ont un point d'intersection unique, situé au point (2 ; 1). Le vecteur x = (2 ; 1) semble donc être la solution unique de ce système d'équations linéaires. Pour trouver cette solution de manière algébrique, nous pourrions additionner les deux équations du système linéaire pour obtenir la nouvelle équation 3y = 3, ce qui nous indique que y = 1. En remettant y = 1 dans l'équation originale x + 2y = 4, nous obtenons x = 2.



I. Méthodes métricienne :

L'un des principaux usages des matrices est qu'elles nous offrent un moyen de travailler avec des systèmes linéaires de manière plus compacte et plus propre. En particulier, tout système de linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Peut-être réécrit comme l'équation matricielle unique Ax = b, où A ∈ $M_{m;n}$ est la matrice des coefficients dont l'entrée (i; j) est $a_{i;\,j}$, b = (b_1; b_2; ...; b_m) ∈ R_m est un vecteur contenant les constantes du côté droit, et x = (x_1; x_2; ...; x_n) ∈ Rn est un vecteur contenant les variables.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Écrivez les systèmes linéaires suivants sous forme d'équations matricielles :

a) $x + 2y = 4$
$3x + 4y = 6$

b) $3x - 2y + z = -3$
$2x + 3y - 2z = 5$

Solutions:

a) Nous plaçons les coefficients du système linéaire dans une matrice A, les variables dans un vecteur x, et les nombres du côté droit dans un vecteur b, obtenant ainsi l'équation matricielle suivante : Ax = b.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

En effet, si nous effectuons la multiplication matricielle du côté gauche, nous obtiendrons exactement le système linéaire avec lequel nous avons commencé.

b) Nous procédons de manière similaire à précédemment, en notant attentivement que la matrice des coefficients a maintenant 3 colonnes et que le vecteur x contient désormais 3 variables.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Comme vérification, nous pouvons effectuer la multiplication matricielle du côté gauche pour voir que nous retrouvons le système linéaire d'origine :

$$\begin{bmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x + 3y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I.2. Système linéaire à matrice A quelconque : Méthode de Gauss
I.2.1. Principe

La méthode de Gauss consiste à transformer le système AX = B à matrice A quelconque en un système équivalent A'X = B' où A' est une matrice triangulaire supérieure.
La triangularisation s'effectue en utilisant les transformations élémentaires se basant sur les opérateurs de Perlis.

I.2.2. Description de la méthode

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Pour simplifier l'algorithme, on forme la matrice augmentée [A , B] ou B devient la $4^{\text{ème}}$ colonne de A ; on aura alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \qquad [A\ ,\ B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

La méthode comporte (n – 1) étapes ; dans notre cas on aura 2 étapes.

- **$1^{\text{ère}}$ Etape : Termes sous diagonaux de la $1^{\text{ère}}$ colonne nuls**
  $a_{21}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = 0$

  Prémultiplication de [A , B] par $E_{21}(-a_{21}/ a_{11})$

  [A , B] . $E_{21}(-a_{21}/ a_{11})$ $\rightarrow$ modification de la $2^{\text{ème}}$ ligne

$$\begin{cases} a_{21}^{(1)} = a_{21} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{11} = 0 \\ a_{22}^{(1)} = a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{12} \\ a_{23}^{(1)} = a_{23} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{13} \\ a_{24}^{(1)} = a_{24} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, a_{14} \end{cases}$$

  Prémultiplication de [A , B] par $E_{31}(-a_{31}/ a_{11})$

  [A , B] . $E_{31}(-a_{31}/ a_{11})$ $\rightarrow$ modification de la $3^{\text{ème}}$ ligne

$$\begin{cases} a_{31}^{(1)} = a_{31} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{11} = 0 \\ a_{32}^{(1)} = a_{32} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{12} \\ a_{33}^{(1)} = a_{33} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{13} \\ a_{34}^{(1)} = a_{34} - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}\, a_{14} \end{cases}$$

  On aura : $[A\ ,\ B]^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24}^{(1)} \\ a_{34}^{(1)} \end{bmatrix}$

- **$2^{\text{ème}}$ étape : Termes sous diagonaux de la $2^{\text{ème}}$ colonne nuls**
  $a_{32}^{(2)} = 0$

Prémultiplication de [A , B] $^{(1)}$ ***par*** $E_{32}(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$

$[A , B]^{(1)} . E_{32}(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}) \rightarrow$ modification de la 3ème ligne

$$\begin{cases} a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{22}^{(1)} = 0 \\ a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)} \\ a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{24}^{(1)} \end{cases}$$

On aura : $[A , B]^{(2)} = [A' , B'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24}^{(1)} \\ a_{34}^{(2)} \end{bmatrix}$

les *pivots*

La résolution de ce système de matrice triangulaire supérieure est telle que :

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}^{(1)}} [a_{24}^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3] \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} [a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3] \end{cases}$$

I.I.3. Algorithme de Gauss pour la résolution d'un système linéaire d'ordre n

1. ***Triangularisation :*** *[A , B] → [A' , B'] en (n-1) étapes*

$$\left.\left.\left.\begin{matrix} w = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ a_{ij} = a_{ij} - w a_{kj} \end{matrix}\right\} j = k+1 \rightarrow n+1 \right\} i = k+1 \rightarrow n \right\} k = 1 \rightarrow n-1 \quad (a_{kk} \neq 0)$$

(Colonnes) *(Lignes)* *(Etapes)*

2. ***Résolution du système résultant :*** $A'X = B'$

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left[b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j \right] \quad (i = n,\ n-1, \dots 1)$$

Par exemple, la matrice associée au système linéaire (A.1.1) est la suivante :

$$\begin{aligned} y + 3z &= 3 \\ 2x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2. \end{aligned} \xrightarrow[{[A|B]}]{\text{La matrice augmentée correspondante}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Ensuite, nous utilisons une méthode appelée élimination de Gauss ou réduction de ligne, qui fonctionne en utilisant l'une des trois opérations élémentaires suivantes sur les lignes pour simplifier au maximum cette matrice :

- Échanger deux lignes que nous notons $R_i \mapsto R_j$.
- Multiplier une ligne par une constante non nulle nous notons cR_j.
- Ajouter ou soustraire une ligne à une autre ligne, multipliée par une constante que nous notons $R_i + cR_j$.

En particulier, nous pouvons utiliser ces trois opérations élémentaires sur les lignes pour mettre n'importe quelle matrice sous forme échelonnée réduite (RREF), ce qui signifie qu'elle présente les trois propriétés suivantes :

- ✓ Dans chaque ligne non nulle, la première entrée non nulle (appelée entrée principale) est à gauche de toutes les entrées principales en dessous d'elle.
- ✓ Chaque entrée principale est égale à 1 et est la seule entrée non nulle dans sa colonne. Par exemple, nous pouvons mettre la matrice sous forme échelonnée réduite en utilisant la séquence d'opérations élémentaires suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

L'une des caractéristiques utiles de la forme échelonnée réduite est que les solutions du système linéaire correspondant peuvent être lues directement. Par exemple, si nous interprétons la forme échelonnée réduite ci-dessus comme un système linéaire, la dernière ligne dit simplement $0x + 0y + 0z = 0$ (nous l'ignorons donc), la deuxième ligne dit que $y + 3z = 3$, et la première ligne dit que $x - 2z = -1$. Si nous déplaçons simplement le terme "z" dans chacune de ces équations de l'autre côté, nous voyons que chaque solution de ce système linéaire a $x = 2z - 1$ et $y = 3 - 3z$, où z est arbitraire (nous appelons donc z une variable libre et x et y des variables principales).

I.2. Système linéaire à matrice A quelconque : Méthode de Gauss-Jordan

La méthode d'élimination de Gauss-Jordan, aussi connue sous le nom de méthode de Gauss-Jordan, est un algorithme utilisé pour résoudre des systèmes linéaires et pour mettre une matrice en forme échelonnée réduite (RREF). Elle consiste en une série d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice, telles que l'échange de lignes, la multiplication d'une ligne par une constante non nulle, et l'addition ou la soustraction d'une ligne à une autre ligne, multipliée par une constante.

L'objectif de la méthode Gauss-Jordan est de transformer une matrice en une forme échelonnée réduite, où chaque ligne a un 1 (appelé entrée principale) comme premier élément non nul, et toutes les autres entrées de cette colonne sont nulles. En utilisant cette forme, on peut lire directement les solutions du système linéaire associé.

La méthode de Gauss-Jordan est largement utilisée en algèbre linéaire et en résolution de systèmes d'équations linéaires, ainsi que pour le calcul des inverses de matrices et la recherche de bases dans l'espace vectoriel. Elle permet de résoudre efficacement des systèmes de différentes tailles et complexités.

La méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires est décrite dans les étapes suivantes :

1. Créez une matrice augmentée : Formez une matrice augmentée en plaçant les coefficients des équations linéaires et les termes constants dans une seule matrice. Cette matrice augmentée a la forme [A | b], où A est la matrice des coefficients et b est le vecteur des termes constants.

2. Démarrez avec la première colonne : Commencez par la première colonne de la matrice augmentée.

3. Élimination vers le bas : Utilisez des opérations élémentaires sur les lignes pour obtenir un "1" (entrée principale) dans la première ligne, première colonne. Pour ce faire, divisez la première ligne

par l'élément non nul en haut (s'il n'est pas déjà 1), puis utilisez cette première ligne pour annuler tous les autres éléments en dessous de lui en utilisant des opérations de soustraction.

4. Élimination vers le haut : Maintenant, utilisez des opérations élémentaires pour obtenir des zéros dans toutes les autres lignes de la première colonne, en partant de la deuxième ligne et en remontant.

5. Passez à la colonne suivante : Répétez les étapes 3 et 4 pour la deuxième colonne, puis pour les colonnes suivantes.

6. Forme échelonnée réduite (RREF) : Continuez ce processus jusqu'à ce que vous obteniez une forme échelonnée réduite (RREF), où chaque ligne a un "1" en tant qu'entrée principale, et toutes les autres entrées de cette colonne sont nulles.

7. Interprétez les solutions : Lorsque vous avez obtenu la forme RREF, lisez directement les solutions du système linéaire à partir de la matrice RREF. Les variables correspondant aux colonnes contenant un "1" sont des variables principales, et les variables correspondant aux colonnes avec des zéros sont des variables libres.

8. Si aucune solution nulle n'est trouvée dans la matrice RREF, alors le système est incohérent (pas de solution).

9. Si des variables libres sont présentes, vous pouvez exprimer les solutions en fonction de ces variables libres.

La méthode de Gauss-Jordan est une méthode puissante pour résoudre des systèmes linéaires, calculer des inverses de matrices, et effectuer d'autres opérations en algèbre linéaire. Elle est largement utilisée dans les domaines des mathématiques, de l'ingénierie et de la science pour résoudre des problèmes mathématiques impliquant des systèmes d'équations linéaires.

Example N01 :

Résolvez le système suivant en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = 8 \\ 4x + 5z = 2 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est la suivante.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Nous allons maintenant effectuer des opérations sur les lignes jusqu'à obtenir une matrice en forme échelonnée réduite.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{13}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-3R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

À partir de cette matrice finale, nous pouvons lire la solution du système. Elle est :

$$\boxed{x = 3, \quad y = 4, \quad z = -2.}$$

Example N01 :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 6x + 3y - 9z = 6 \\ 7x + 14y - 21z = 13 \end{cases}$$

La matrice augmentée correspondante $[A|B]$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array}\right]$$

Effectuons maintenant des opérations sur les lignes de cette matrice augmentée.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-6R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 9 & -6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-7R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Nous obtenons une ligne dont les éléments sont tous nuls à l'exception du dernier à droite. Par conséquent, nous concluons que le système d'équations est inconsistant, c'est-à-dire, il n'a pas de solutions.

I.3. Système à matrice A symétrique définie positive –Méthode de Cholesky -

Pour résoudre un système à matrice A ; A étant une matrice symétrique définie positive, on utilise la méthode de Cholesky

- ✓ *A est symétrique : $A = A^t$;*
- ✓ *A symétrique définie positive : tous les déterminants de la matrice A sont strictement positifs, > 0. (Critère de Sylvester)*

I.3.1. Théorème de Cholesky

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors elle peut être décomposée en $A=L\,L^t$; avec L : Matrice triangulaire inférieure.

I.3.2. Description de la méthode

Pour résoudre un système linéaire AX = B ; A matrice symétrique définie positive on a :

AX = B et A = L L^t

Donc : L L^t X = B

On pose Y = L^tX → L Y = B on aura donc :

$$\begin{cases} L\,Y = B \;\;;\;\; L: Matrice\ triangulaire\ \text{inf} \rightarrow\ résolution\ directe\ pour\ trouver\ Y \\ L^t X = Y \;\;;\;\; L^t: Matrice\ triangulaire\ \text{sup} \rightarrow\ résolution\ directe\ pour\ trouver\ X \end{cases}$$

I.3.3. Décomposition de la matrice A

$$A = L\,L^t \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & \dots & l_{2n} \\ & & \vdots\ddots & & \\ & & \vdots\ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}\ l_{jk} \qquad \begin{matrix} i = 1 \rightarrow n \\ j = 1 \rightarrow n \end{matrix}$$

Pour la partie triangulaire supérieure de A, A étant une matrice symétrique, la $r^{ième}$ ligne s'écrit :

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r} l_{rk}\ l_{jk} \qquad j = r \rightarrow n$$

Soit

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}\ l_{jk} + l_{rr}\ l_{jr}$$

D'où

$$a_{rr} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2 + l_{rr}^2$$

Soit

$$\left.\begin{matrix} l_{rr} = \sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2} \\ l_{jr} = \frac{1}{l_{rr}}\left[a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk} \right] \quad (j = r+1, \dots, n) \end{matrix}\right\} \; r = 1 \rightarrow n$$

- **Algorithme de décomposition de Cholesky A → L L^t**

$$\left.\begin{matrix} \textbf{1.} \quad l_{rr} = \sqrt{a_{rr} - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2} \\ \textbf{2.} \quad l_{jr} = \dfrac{1}{l_{rr}}\left[a_{rj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk} \right] \quad (j = r+1, \dots, n) \end{matrix}\right\} \; r = 1 \rightarrow n$$

Remarque *: si le terme* $(a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2) < 0$*, alors la matrice A n'est pas définie positive.*
Ce test est un autre moyen pour vérifier si une matrice est définie positive ou non.

I.3.4. Résolution

Après décomposition, la résolution de L L^t X = B s'écrit :

$$\begin{cases} L\,Y = B \;\;;\;\; L: Matrice\ triangulaire\ \text{inf} \rightarrow\ résolution\ directe\ pour\ trouver\ Y \\ L^t X = Y \;\;;\;\; L^t: Matrice\ triangulaire\ \text{sup} \rightarrow\ résolution\ directe\ pour\ trouver\ X \end{cases}$$

La résolution est immédiate par les algorithmes ; systèmes à matrices triangulaires inférieure et supérieure.

- **Algorithme de Cholesky**

1. ***Décomposition A → L Lᵗ***

$$\left.\begin{aligned} l_{rr} &= \sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2} \\ l_{jr} &= \frac{1}{l_{rr}}\left[a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk}\right] \quad (j = r+1, \dots, n) \end{aligned}\right\} r = 1 \to n$$

2. ***Résolution de L Lᵗ X = B***

$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right] \quad (i = 1, \dots, n)$

$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} x_j \right] \quad (i = n,\ n-1, \dots 1)$

II. Méthodes itératives

L'idée des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs $X^{(k)}$ qui converge vers le vecteur X, solution du système AX = B. $X = \lim_{k \to \infty} X^{(k)}$

L'intérêt des méthodes itératives, comparées aux méthodes directes, est d'être simples à programmer et de nécessiter moins de place mémoire. En revanche, le temps de calcul est souvent plus long.

II.1. Méthode de Jacobi

II.1.1. Condition suffisante de convergence

Théorème : *Une condition suffisante pour que la solution $X^{(k+1)}$ converge vers la solution du système est que A, matrice du système AX = B, soit à diagonale fortement dominante.*

II.1.2. Méthode de Jacobi

L e système linéaire AX = B est équivalent à :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1\ (j \neq i)}^{n} a_{ij} x_j \right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

Pour une donnée initiale $X^{(0)}$ choisie, on calcule $X^{(k+1)}$ par :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1\ (j \neq i)}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad (i = 1, \dots, n)$$

Soit

$$r_i^{(k)} = \left[b_i - \sum_{j=1\ (j \neq i)}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$ Vecteur résidu

$x_i^{(k+1)}$ peut s'écrire:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

II.1.3. Test d'arrêt

Le critère d'arrêt des itérations est :

$$\frac{\|R^{(k)}\|}{\|B\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$$

II.1.4. Algorithme de Jacobi

1. ***Initialisation***
   Etant données A, B, $X^{(0)}$, k_{max}, ε

2. ***Généralisation***

$$\left.\begin{aligned} r_i^{(k)} &= \left[b_i - \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \\ x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} \quad (i = 1 \to n) \end{aligned}\right\} \ k = 0, 1, \dots, k_{max}$$

3. ***Test d'arrêt***
   Arrêter si :

$$\frac{\|R^{(k)}\|}{\|B\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\frac{\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|}{\|X^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

Ou

$$\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\| < \varepsilon$$