Chapitre I

Rappels on Analyse Matricielle

Objectif du chapitre :

Définir les notions de :

- ✓ *Matrice*
- ✓ *Opérations sur les matrices*

Introduction

L'analyse numérique ou calcul numérique ou encore mathématiques appliquées est le domaine de mathématiques où l'on étudie des algorithmes permettant de résoudre des problèmes de l'analyse mathématiques au moyen de calcul arithmétique.
Les problèmes de l'analyse mathématiques se basant sur l'utilisation des systèmes d'où l'application de matrices. Pour ce faire, ce chapitre s'intéresse principalement à l'analyse matricielle.

I. Matrice

I.1. Définition

Une matrice est un tableau rectangulaire d'éléments comportant n lignes et m colonnes.

Soit A une matrice ; on note a_{ij} l'élément de la matrice A situé sur la ligne i et la colonne j. La matrice A s'écrit en général :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nm} \end{bmatrix}$$

La matrice A est dite de taille nxm ;
n : nombre de lignes ;
m : nombre de colonnes.

I.2. Quelques types de matrices

- **Matrice rectangulaire :** *Nombre de lignes ≠ Nombre de colonnes (A(n,m))*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nm} \end{bmatrix}$$

- **Matrice carrée :** *Nombre de lignes n = Nombre de colonnes m (A(n,n))*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

On peut distinguer plusieurs types de matrices carrées :

- **Matrice diagonale :** *$a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice symétrique-antisymétrique :**
  - ✓ *$a_{ij} = a_{ji}$; la matrice est symétrique.*
  - ✓ *$a_{ij} = -a_{ji}$; la matrice est antisymétrique.*

- **Matrice triangulaire supérieure :** *$a_{ij} = 0$ pour $i > j$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice triangulaire inférieure :** *$a_{ij} = 0$ pour $i < j$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice singulière :** *une matrice est singulière si son déterminant est nul.*

- **Matrice orthogonale :** *une matrice A est orthogonale si $[A]^{-1} = [A]^t$*

- **Matrice définie positive :** *une matrice A est dite définie positive si les éléments a_{ij} de la diagonale principale (a_{ii}) sont $\neq 0$, et cela même durant la procédure d'élimination de Gauss.*

Exercice I. (Matrice triangulaire, strictement triangulaire et diagonale). *Dire si les matrices suivantes sont triangulaires, strictement triangulaires ou diagonales :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.3. Matrices particulières

- **Matrice transposé :** *$[A]^t$; échange des lignes avec les colonnes.*
- **Matrice conjuguée :** *$[\bar{A}]$; les éléments de $[\bar{A}] = \overline{a_{ij}}$*
- **Matrice adjointe :** *$[A]^* = [\bar{A}]^t$*
- **Matrice Hermitienne :** *$[A] = [A]^*$*
- **Matrice à diagonale dominante :** $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i$
- **Matrice à diagonale fortement dominante :** $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i$

Example 1 (Transposée et transconjuguée). *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2+3i & 3+4i \\ 1+5i & 3+7i \end{pmatrix}.$$

Sa transposée et transconjuguée sont données, respectivement, par

$$A^T = \begin{pmatrix} 2+3i & 1+5i \\ 3+4i & 3+7i \end{pmatrix}, \qquad A^H = \begin{pmatrix} 2-3i & 1-5i \\ 3-4i & 3-7i \end{pmatrix}.$$

II. Opérations sur les matrices

II.1. Somme et différence de matrices

Soit $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ des matrices de dimensions $m \times n$. La somme (différence) des matrices, notée $A + B$, est la matrice $m \times n$ définie par la formule :

Soient A et B deux matrices :

$C = A+(-)B \qquad c_{ij} = a_{ij}+(-)b_{ij}$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

trouver $A + B$, $A - B$, and $-A$.

Solution.

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 1+2 & 0+1 \\ -2+1 & 0+4 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3--3 & 1-2 & 0-1 \\ -2-1 & 0-4 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

La négation de A est encore plus simple

$$-A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -0 \\ --2 & -0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

II.2. Multiplication par un scalaire

La multiplication d'une matrice par un scalaire est la multiplication de ses éléments par ce scalaire.

Soit A une matrice et soit λ un scalaire.

$C = \lambda A \qquad c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad c = 3.$$

trouve cA, $0A$, and $-1A$.

Solution. Alor

$$cA = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot -2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

Donc

$$0A = 0\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

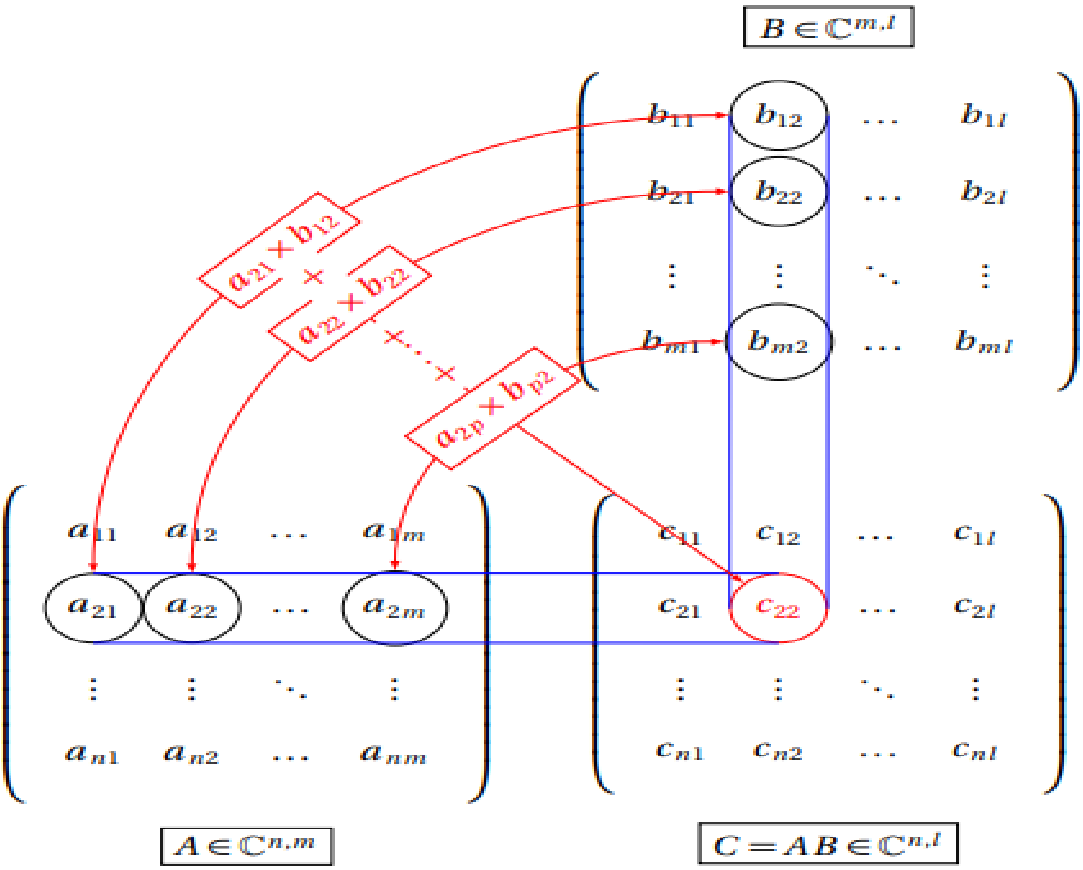
$$(-1)\,A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -A.$$

II.3. Produit de matrices

Si A(n,m) et B(m,l), on définit la matrice C = A.B de format (n,l) par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$$

Remarque : *Condition d'existence de A.B ; nombre de colonnes de A=nombre de lignes de B*



Exercice 1 (Produit matriciel). *Soient $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ et $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ définies comme suit :*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 40 & 12 & 11 \\ 28 & 16 & 9 \end{pmatrix}.$$

Précisez si les produits BA et BA^T sont définis et, si c'est le cas, les calculer.

III. Déterminant

On appelle déterminant d'une matrice carrée A, le scalaire noté det(A) définie par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

III.1. Mineur

Soit une matrice carrée A d'ordre n, si l'on supprime la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, *le déterminant de la matrice d'ordre (n-1) obtenue est appelé mineur associé à l'élément a_{ij} de la matrice A, on le not m_{ij}.*

Soit par exemple $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

III.1. Calcul du déterminant

Le déterminant peut s'obtenir par :

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, S_{ij}$ (Suivant la ligne i)

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, S_{ij}$ (Suivant la colonne j)

IV. Matrice inverse

On appelle inverse de A, la matrice notée A^{-1} telle que :

$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$ (Matrice identitée)

IV.1. Comatrice

On appelle comatrice d'une matrice carrée A(n,n), la matrice S c'est la matrix des mineur multipliéé par la matrix de signe (ou le cofacteur)

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} \cdots & S_{2n} \\ & \vdots & \\ S_{n1} & S_{n2} \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}$$

où S_{ij} est le cofacteur de a_{ij}.

IV.2. Calcul de la matrice inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, Adj(A)$$

Avec Adj (A) = *la matrice S^T*

V. Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice A(n,m), noté r(A) ou rg(A), le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) linéairement indépendantes.

$rg(A) \le Inf(n,m)$

VI. Trace d'une matrice

On appelle trace d'une matrice carrée A(n,n), notée tr(A), la somme de ses éléments diagonaux.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

VII. Transformations élémentaires d'une matrice

VII.1. Définitions

On appelle transformation élémentaire sur les lignes (ou colonnes) d'une matrice l'une des opérations suivantes :

1. *La permutation de deux lignes (colonnes)*
2. *La multiplication d'une ligne (colonne) par un scalaire*
3. *L'addition à la $i^{ème}$ ligne (colonne) de d fois la $l^{ème}$ ligne (colonne) où $i \neq l$ et d un scalaire.*

VII.2. Opérations élémentaires de Perlis

Soient les matrices suivantes :

- E_{ij} : Matrice [I] (Identité) dont on a permuté les $i^{ème}$ et $j^{ème}$ lignes.
- $E_i(d)$ = [I] avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [I] x d)
- $E_{il}(d)$ = [I] avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [I] + d.$l^{éme}$ ligne [I])

Les matrices E_{ij}, $E_i(d)$ et $E_{il}(d)$ s'appellent Matrices élémentaires de Perlis ou Opérateurs élémentaires de Perlis. Leurs matrices inverses s'écrivent :

- $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$
- $E_i^{-1}(d) = E_i(1/d)$
- $E_{il}^{-1}(d) = E_{il}(-d)$

VII.3. Transformations élémentaires

Les transformations élémentaires sur une matrice A peuvent se ramener à la prémultiplication de A par l'une des matrices élémentaires de Perlis.

- $A_1 = E_{ij}.A = [A]$ avec permutation des $i^{ème}$ et $j^{ème}$ lignes
- $A_2 = E_i(d).A = [A]$ avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [A] x d)
- $A_3 = E_{il}(d).A = [A]$ avec ($i^{ème}$ ligne = $i^{ème}$ ligne [A] + d.$l^{éme}$ ligne [A])

Remarque : *On peut aussi définir les matrices élémentaires pour les opérations sur les colonnes, on les note P_{ij}, $P_i(d)$ et $P_{il}(d)$.*