جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي–
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

السنة الجامعية: 2022 – 2023
المستوى: سنة اولى
التخصص: الجذع المشترك

مقياس الرياضيات1 (حل السلسلة 05)

التمرين الاول :

3) لدينا : $f(x)=-3x^3+5x^2-4$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-4x+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$$

4) لدينا : $f(x)=x^4-x^3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$$

5) لدينا : $f(x)=\frac{4}{x^2}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}^*$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و عليه تقبل دوال أصلية F على كل منهما معرفة بالعبارة:

$$F(x)=\frac{-4}{x}+k;k\in\mathbb{R}$$

8) لدينا : $f(x)=\cos 2x-\sin 3x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$

9) لدينا : $f(x)=\sin x.\cos^3 x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $F(x)=\frac{1}{4}\cos^4 x+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$

حل السلسلة 05

التمرين 02+03:

1

a. $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$;

Correction : $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x)^3}=\frac{1}{2}.\frac{2x+2}{(x^2+2x)^3}=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u^3(x)}=\frac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-2}\times(-2)u'(x)u^{-3}(x),$

$u(x) = x^2 + 2x,\ n-1=-3,\ n=-2,\ F(x)=-\frac{1}{4}(x^2+2x)^{-2}=-\frac{1}{4(x^2+2x)^2}$.

b. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Correction : $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2-1$, $F(x)=\frac{1}{2}\ln u(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+k$.

c. $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}+^*$.

Correction : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}=x-1+\frac{1}{x}\times\ln x=x-1+\frac{1}{2}\times 2u'(x)\times u(x)$ avec $u(x) = \ln x$,

$F(x)=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}u^2(x)=\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+k$.

❶ تعيين α و β :

$$H'(x)=g(x)-1\Rightarrow \alpha e^{-x}-(\alpha x+\beta)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}+1-1$$
$$\Rightarrow(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}-\alpha=-1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$$

ومنه:

$$H(x)=(x+2)e^{-x}$$

❷ استنتاج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0:

نضع $\int g(x)dx=G(x)$

لدينا:

$$H'(x)=g(x)-1\Rightarrow\int H'(x)dx=\int(g(x)-1)\,dx$$
$$\Rightarrow H(x)=G(x)-x+c$$
$$\Rightarrow G(x)=(x+2)e^{-x}+x-c$$

لدينا: $G(0)=0$ ومنه:

$$G(0)=0\Rightarrow 2-c=0$$
$$\Rightarrow c=2$$

إذن: الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم من أجل $x=0$ هي:

$$G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$$

التمرين04

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt = \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^{e} \ln t\,dt = \left[t\ln t - t\right]_1^{e} = 1$.

d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2-1=1$.

التمرين05

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

où l'on a trouvé $\alpha = 3$ et $\beta = -2$. $\int \frac{1}{u} = [\ln|u|]$
$\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 3\left[\ln|x+1|\right]_0^1 - 2\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 \\ &= 3\ln 2 - 0 \quad + \quad 1-2 \\ &= 3\ln 2 - 1\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right) \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{-1}{1-t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

3. $$x^3 = x^3 - 4x + 4x = x(x^2 - 4) + 4x$$

Donc

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$$

$$F_3(x) = \int \left(x + \frac{4x}{x^2 - 4}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2 - 4| + K$$

❶ كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = a + x + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a + \frac{b}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 + x + ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3 + (a+2)x^2 + (2a+1)x + a + b}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ 2a + 1 = 3 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

❷ تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = 2$:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2(x+1)} + c \end{aligned}$$

ولدينا: $F(1) = 2$

ومنه:

$$\begin{aligned} F(1) = 2 &\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2(x+1)} + c = 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + c = 2 \\ &\Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

إذن:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2(x+1)} + 1$$

التمرين 07

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$
$$v(t) = \ln(t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$
$$I_1 = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}dt$$

Donc

$$I_1 = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$
$$u'(t) = \sin(t) \qquad u(t) = -\cos(t)$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$
$$I_2 = [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$$

Donc

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

-

التمرين 08

1.

$$\frac{2t^2}{t^2-1} = 2\frac{t^2-1+1}{t^2-1} = 2 + \frac{2}{t^2-1} = 2 + \frac{2}{(t-1)(t+1)} = 2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$
$$F(t) = \int\left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + K$$

2.

$$t = \sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = t^2 - 1 \Leftrightarrow x = \ln(t^2-1)$$

Ce qui entraine que

$$dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$$

Par conséquent

$$G(x) = \int t \times \frac{2t}{t^2-1}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + K$$
$$= 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left|\sqrt{e^x+1}-1\right| - \ln\left|\sqrt{e^x+1}+1\right| + K$$

التمرين 09

3.

$$F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{9\left(1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right)}}dx$$

On pose $t = \frac{2x}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}t \Rightarrow dx = \frac{3}{2}dt$

$$F_3(x) = \int \frac{\frac{3}{2}t}{3\sqrt{1+t^2}} \times \frac{3}{2}dt = \frac{3}{4}\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{3}{4}\sqrt{1+t^2} + K = \frac{3}{4}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} + K$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\sqrt{9+4x^2} + K = \frac{1}{8}\sqrt{9+4x^2} + K$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Posons : $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x\,dx$. La variable x varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}dx &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= \left[2\sqrt{u+1}\right]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3

On pose

$$t = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow t^2 = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2tdt$$

$$F(x) = \int -\frac{2t}{1+t}dt = -2\int \frac{t}{1+t}dt = -2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = -2\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= -2t + 2\ln(t+1) + K = -2\sqrt{1-x} + 2\ln\left(\sqrt{1-x}+1\right) + K$$