I. Séries numériques

1) Définitions :

Soient $(u_n)_n$ une suite numérique, $u_n \in IK$ $(IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Et (S_n) une suite définie par : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ (Somme de n premier termes de (u_n))

On appelle série numérique le couple (S_n, u_n) constitué de suites (u_n) et (S_n).

On appelle u_n le terme général de la série.

On appelle $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ La somme partielle de la série.

On dit que la série (S_n, u_n) est convergente si seulement si la suite (S_n) est convergente.

On appelle $s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ La Somme de la série .

Remarque :

1) On appelle : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ Série numérique de terme général u_n.

2) Une série numérique qui n'est pas convergente, est dite divergente. $(\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$ Ou n'existe pas).

Exemples :

1) $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$ Et $s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$.

Alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ est convergente, et sa somme $s = 1$.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $u_n = ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=(\ln(2)-\ln(1))+(\ln(3)-\ln(2))+\cdots+(\ln(n)-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln(n))$$

$$S_n=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1)\ \ ,\ \ s=\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty \text{ Alors : } \sum_{n=0}^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ divergente.}$$

2) Condition nécessaire de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n \ \text{ convergente } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

Remarque :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0 \ \not\Rightarrow \ \sum_{n=0}^{+\infty}u_n \ \text{ convergente}$$

Exemples :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$, $\displaystyle u_n=\frac{n}{n+1}\xrightarrow{n\to+\infty}1$ Alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$ divergente.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\displaystyle u_n=ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to+\infty}0$ Et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ divergente.

(Voir l'exemple 2 précédent)

3) Séries particulières :

1. Série de Riemann : $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{1}{n^{\alpha}}$ Convergente si seulement si $\alpha>1$.
2. Série harmonique : $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{1}{n}$ Divergente (Riemann α=1).
3. Série géométrique : $\displaystyle\sum_{n\geq0}r^{\alpha}$ Convergente si seulement si $|r|<1$.
4. Série de Bertrand : $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ convergente si seulement si : $\begin{cases}\alpha>1 \text{ et } \beta\in R\\ \beta>1 \text{ et } \alpha=1\end{cases}$

4) Critères de convergences :

Soit la série : $\displaystyle\sum_{n\geq0}u_n$ de terme général u_n.

Théorème 01 : Règle de Cauchy

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l$ Existe, alors : $\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\geq0}u_n \text{ convergente si } l<1\\ \displaystyle\sum_{n\geq0}u_n \text{ divergente si } l>1\end{cases}$

Exemples :

$$1)\ \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n} \quad , \qquad \sqrt[n]{|u_n|}=\frac{n+5}{2n+1}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{2}<1 \text{ alors } \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n} \text{ convergente.}$$

$$2)\ \sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2} \quad , \quad \sqrt[n]{|u_n|}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\xrightarrow{n\to+\infty} 0<1 \text{ alors } \sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2} \text{ convergente.}$$

Théorème 02 : Règle de D'Alembert

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l \text{ Existe , alors : } \begin{cases}\sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ convergente si } & l<1\\ \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ divergente si } & l>1\end{cases}$$

Exemples :

$$1)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!} \quad , \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2}{n+1}\xrightarrow{n\to+\infty} 0<1 \text{ alors } \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!} \text{ convergente.}$$

$$2)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)!}{n^2} \quad , \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(n+2)\xrightarrow{n\to+\infty} +\infty \text{ alors } \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!} \text{ divergente.}$$

Théorème 03 : Règle de comparaison

$$\text{Soient } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} v_n \text{ deux séries à termes positifs.}$$

$$\text{Pour } \quad n\geq n_0 \ , \qquad u_n\leq v_n \quad \text{alors : } \begin{cases}\sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ Convergente} \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ Convergente}\\ \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ Divergente} \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ Divergente}\end{cases}$$

Exemples :

$$1)\ \sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{1+5^n} \qquad u_n=\frac{3^n}{1+5^n}\leq\frac{3^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \left(0<5^n\leq 1+5^n \Rightarrow \frac{1}{1+5^n}\leq\frac{1}{5^n}\right)$$

$$\text{Comme } \sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n \text{ série géométrique convergente } \left(q=\frac{3}{5}<1\right).$$

Alors : $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{1+5^n}$ est convergente .

2) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ $\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \geq \frac{1}{n} \quad \left(n \geq 2, \quad \sqrt{n^2-1} \leq \sqrt{n^2} = n\right).$

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ Série harmonique divergente, alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ est divergente.

Théorème 04 : Règle d'équivalence

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ Alors : $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Exemples :

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+1}{n^5+4}$ $\quad u_n = \frac{2n^2+1}{n^5+4} \sim \frac{2n^2}{n^5} = \frac{2}{n^3}$

$\sum_{n\geq 0} \frac{2}{n^3}$ Série de Riemann convergente $(\alpha = 3 > 1)$. Alors : $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+1}{n^5+4}$ est convergente.

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{7^n}{5^n+\ln(n)}$ $\quad u_n = \frac{7^n}{5^n+\ln(n)} \sim \frac{7^n}{5^n} = \left(\frac{7}{5}\right)^n \quad \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{5^n} = 1\right).$

$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{7}{5}\right)^n$ Série géométrique divergente $\left(q = \frac{7}{5} > 1\right)$. Alors $\sum_{n\geq 0} \frac{7^n}{5^n+\ln(n)}$ Divergente.

Théorème 05 : Règle d'Abel

La série $\sum_{n\geq 0} (u_n v_n)$ Convergente si seulement si $\begin{cases} (u_n) \text{ monotone et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \exists M \geq 0 \quad \left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leq M \end{cases}$

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n^3+1} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{2n^3+1} = a_n b_n$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2n^3+1} \text{ décroissante et } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^n\right| = \left|\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}\right| \leq \dfrac{1+|(-1)^{n+1}|}{2} = 1 \end{cases}$$

D'après Abel $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{2n^3+1}$ est convergente.

5) Propriétés :

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ Deux séries numériques, et α un réel. On a :

$$\begin{cases} \text{Si } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ et } \sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ convergentes , alors } \sum\limits_{n\geq 0} \alpha u_n \text{ Et } \sum\limits_{n\geq 0} (u_n+v_n) \text{ sont convergentes} \\ \text{Si } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ convergente et } \sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ divergente , alors } \sum\limits_{n\geq 0} (u_n+v_n) \text{ est divergente} \\ \text{Si } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{divergente et } \sum\limits_{n\geq 0} v_n \text{ divergente, On ne peut rien conclure} \end{cases}$$

Exemple :

Soient $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{5^n}+2^n\right)$ Et $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{5^n}-2^n\right)$ deux séries divergentes.

Posons : $u_n = \dfrac{1}{5^n} + 2^n$ et $v_n = \dfrac{1}{5^n} - 2^n$

$$\begin{cases} u_n + v_n = \dfrac{2}{5^n} \\ u_n - v_n = 2^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n\geq 0}(u_n+v_n) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2}{5^n} \text{ est convergente(série géométrique } q = \dfrac{1}{5} < 1) \\ \sum\limits_{n\geq 0}(u_n-v_n) = \sum\limits_{n\geq 0} 2^{n+1} \text{ est divergente(série géométrique } q = 2 > 1) \end{cases}$$

6) Séries alternées :

On appelle série alternée toute série s'écrit sous la forme :

$\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ Avec (u_n) de signe constante.

Théorème de Leibnitz :

Si la suite (u_n) est monotone, et tend vers zéro. Alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente.

Exemples :

1) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ On a $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ suite décroissante. Et $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Alors d'après Leibnitz, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

2) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n sin\left(\frac{1}{n}\right)$ On a $\left(sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)' = \frac{-1}{n^2}cos\left(\frac{1}{n}\right) < 0$, $\left(sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ décroissante,

Et $sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Alors d'après Leibnitz, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

7) Convergence absolue et semi-convergente d'une série numérique :

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique

a) On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente ssi la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ est convergente.

b) On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente ssi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ divergente.

Proposition :

$$\sum_{n\geq 0}|u_n| \text{ convergente} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ convergente.}$$

Exemples :

1) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente d'après Leibnitz. $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ série de Riemann

$\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ divergente. Alors $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n^3 + n^2 + 3}$ $\quad u_n = \frac{(-1)^n}{2n^3 + n^2 + 3}$, $|u_n| = \frac{1}{2n^3 + n^2 + 3} \sim \frac{1}{2n^3}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^3}$ Série de Riemann convergente ($\alpha = 3 > 1$).

Alors : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n^3 + n^2 + 3}$ est absolument convergente.

D'ou $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n^3 + n^2 + 3}$ est convergente.