# 9 Applications continues

**Définition 16** *Soit $(X,\tau)$ et $(Y,\tau')$ deux espaces topologiques, $a$ un point de $X$ et $f$ une application de $X$ dans $Y$.*

1. *On dit que $f$ est <u>séquentiellement continue au point $a$</u> si pour toute suite $(x_n)_n$ de $X$ convergeant vers $a$, la suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$ dans $Y$, i.e.*

$$\forall (x_n) \subset X : \quad x_n \overset{X}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \overset{Y}{\to} f(a).$$

2. *On dit que $f$ est <u>continue au point $a$</u> si l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de $a$. Cela s'écrit :*

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)) : \ f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(a). \tag{1}$$

3. *On dit que $f$ est <u>continue sur $X$</u> si elle est continue en tout point de $X$.*

   *On note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de $X$ dans $Y$.*

**Remarque 20** Grâce aux propriétés des images directe et réciproque :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X),\ \forall B \in \mathcal{P}(Y) : \quad f\left[f^{-1}(B)\right] \subset B \quad \text{et} \quad f^{-1}\left[f(A)\right] \supset A,$$

on peut reformuler la définition de continuité en un point comme suit :

*$f$ est dite continue au point $a$ si*

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists V \in \mathcal{V}(a) : \quad f(V) \subset V'. \tag{2}$$

**Remarque 21** Dans (1), on peut remplacer $\mathcal{V}(f(a))$ par une base de voisinages $\mathcal{B}(f(a))$ de $f(a)$.

Dans (2), on peut remplacer $\mathcal{V}(f(a))$ par une base de voisinages $\mathcal{B}(f(a))$ de $f(a)$ et $\mathcal{V}(a)$ par une base de voisinages $\mathcal{B}(a)$ de $a$.

**Exemple 48** On munit les ensembles $X = \{a,b,c,d\}$ et $Y = \{1,2,3,4\}$ respectivement des topologies

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\} \quad \text{et} \quad \tau' = \{\varnothing, Y, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}.$$

Soit $f$ l'application de $(X,\tau)$ dans $(Y,\tau')$ définie par

$$f(a) = f(b) = 1,\ f(c) = 2 \text{ et } f(d) = 4.$$

On vérifie aisément que $f$ est continue au point $d$ et qu'elle n'est pas continue au point $c$.

**Exemple 49** On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle.

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in ]-\infty, 1] \\ x+1 & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

  n'est pas continue au point $a = 1$ *(Faire un graphique et raisonner)*.

**Exemple 50** L'application identique $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ définie de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ (Pour tout $a \in \mathbb{R}$, prendre $V' = \{a\}$ lequel est un voisinage de $f(a) = a$).

**Remarque 22** Si $a$ est un point isolé dans $X$, toute application $f : X \to Y$ est continue en $a$. En effet, dans (2) il suffit de prendre $V = \{a\}$ lequel est un voisinage de $a$.

**Exemple 51** Si $X$ est discret, toute application $f : X \to Y$ est continue car tout point de $X$ est isolé.

**Proposition 24** *On a l'implication*

$$(f \text{ continue en } a) \Rightarrow (f \text{ séquentiellement continue en } a).$$

*La réciproque exige l'existence d'une base dénombrable de voisinages de a.*

**Proposition 25 (Transitivité de la continuité)** *Soient $X, Y$ et $Z$ trois espaces topologiques, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.*

**i)** *Si $f$ est continue en $a \in X$ et $g$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f : X \to Z$ est continue en $a$.*

**ii)** *Si $f$ et $g$ sont continues, alors $g \circ f$ est aussi continue.*

**Proposition 26 (Caractérisations de la continuité sur un ensemble)** *Pour deux espaces topologiques $(X, \tau)$ et $(Y, \tau')$ et une application $f : X \to Y$, on a équivalence entre :*

*(i) $f$ est continue sur $X$.*

*(ii) L'image réciproque de tout ouvert de $Y$ est un ouvert de $X$, i.e.*

$$\forall \mathcal{O}' \in \tau',\ f^{-1}(\mathcal{O}') \in \tau.$$

*(iii) L'image réciproque de tout fermé de $Y$ est un fermé de $X$.*

*(iv) Pour toute partie $A$ de $X$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

**Remarque 23** Dans le point (ii) de la proposition ci-dessus, on peut remplacer la famille $\tau'$ des ouverts de $Y$ par une base d'ouverts de $Y$.

**Remarque 24** En général, l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue n'est pas ouverte (resp. fermée). Voici deux exemples :

– si $f(x) = x^2$, $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$ ;

– si $f(x) = \arctan x$, $f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

**Remarque 25** Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux topologies sur $X$ ; alors $\tau_1$ est plus fine que $\tau_2$ si et seulement si l'application identique $\mathsf{id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ est continue.

**Proposition 27** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et $A$ un sous-espace topologique de $X$.*

**i)** *L'injection canonique $i : A \to X$, $x \mapsto x$ est continue sur $A$.*

**ii)** *Si $f : X \to Y$ est une application continue sur $X$, alors sa restriction $f|_A$ est continue sur $A$.*

**Lemme 2 (d'Urysohn)** *Soit $X$ un espace normal, et $A$ et $B$ deux parties fermées et disjointes de $X$. Alors, il existe une application continue $h : X \to [0,1]$ nulle sur $B$ et égale à 1 sur $A$.*

**Définition 17 (Homéomorphisme)** *Soit $(X, \tau)$ et $(Y, \tau')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite un homéomorphisme si elle est bijective de $X$ sur $Y$ et si $f$ et $f^{-1}$ sont continues (on dit alors que $f$ est bicontinue).*
*S'il existe un homéomorphisme de $(X, \tau)$ sur $(Y, \tau')$, on dit que $(X, \tau)$ et $(Y, \tau')$ sont homéomorphes.*

**Exemple 52** On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle et les ensembles $]0, +\infty[$, $[0, +\infty[$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $]-1, 1[$ de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

– L'application $f : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.

– Pour tout entier naturel $n$, l'application $[0, +\infty[ \to [0, +\infty[$, $x \mapsto x^n$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

– L'application $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan x$. $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

– L'application $]-1, 1[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1-|x|}$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to ]-1, 1[$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$. $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]-1, 1[$.

**Remarque 26** A la lumière de la proposition 26, une bijection $f$ de $X$ sur $Y$ est un homéomorphisme si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (fermé) de $Y$ est un ouvert (fermé) de $X$, et l'image directe de tout ouvert (fermé) de $X$ est un ouvert (fermé) de $Y$ (observer que $f(\mathcal{O}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$).

**Remarque 27** Les homéomorphismes jouissent des propriétés suivantes :

- L'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme (si $f$ est bijective alors $(f^{-1})^{-1} = f$).
- La composée $f \circ g$ de deux homéomorphismes est un homéomorphisme (si $f$ et $g$ sont bijectives alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$).
- L'ensemble de tous les homéomorphismes d'un espace $X$ sur lui-même est un groupe pour la loi $\circ$.

A la lumière de la remarque 25, on a

**Proposition 28** *Deux topologies $\tau_1$ et $\tau_2$ sur un même ensemble $X$ sont équivalentes (égales) si et seulement si l'application identique* $\mathrm{id} : X \to X$ *est un homéomorphisme de* $(X, \tau_1)$ *sur* $(X, \tau_2)$.