وزارة التعلبم العالي و البحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية و علوم التسيير   قسم الجذع المشترك – سنة أولى

1)- الإشتقاق

2)-الدوال الأسية و اللوغاريتمية

من إعداد : الأستاذة بن معنصر وردة

1)-الإشتقاق:

1-1) مشتق دالة عند نقطة :

لتكن الدالة f معرفة على مجال I و $x_0 \in I$ نقول أن f قابلة للإشتقاق عند x_0 اذا كان

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

العدد الحقيقي$f'(x_0)$ يسمى مشتق الدالة f عندx_0

ملاحظة

اذا كانت f قابلة للإشتقاق عند x_0 فهي مستمرة عند هذه النقطة و العكس غير صحيح على العموم

مثال: لتكن الدالة المعرفة

$$f(x) = -2x + sinx$$

بإستخدام التعريف

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x+sinx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{x} + \frac{sinx}{x} = -1$$

2-1) المشتق من اليمين و اليسار

f قابلة للإشتقاق عند x_0 من اليمين إذا كانت النهاية

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$$ موجودة

f قابلة للإشتقاق من اليسار اذا كانت النهاية

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g$$ موجودة

ملاحظة : تكون f قابلة للإشتقاق عند x_0إذا كانت قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار و

$$f'_d(\mathrm{x}) = f'_g(x)$$

أمثلة: 1) ندرس قابلية الإشتقاق عند الصفر

$$h(x) = |x| \qquad D_h = R$$

$$h(x) = \begin{cases} x \ si & x \geq 0 \\ -x \ si & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{-x}{x} = -1$$

h قابلة للإشتقاق على يسار ويمين الصفر لكن المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار

إذنh غير قابلة للإشتقاق

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad D_g = [0, +\infty[$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

إذن gغير قابلة للإشتقاق على اليمين

3-1 المشتق من الرتبة العليا لدالة:

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن مشتقها هو f'

إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على I فإن مشتقها هو f''

إذا كانت f'' قابلة للإشتقاق على I فإن مشتقها هو f'''

نتحصل على علاقة تراجعية

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

مثال

إيجاد المشتق من الرتبةn

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$f^{(2)(x)} = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$f^{(3)(x)} = (-1)(-2)(-3)(x^{-4}$$

$$f^{(4)(x)} = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5}$$

$$f^{(n)(x)} = (-1)(-2)(-3)\ldots(-n)x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

4-1 نظرية لوبيطال:

لتكن g و f دالتين معرفتين و مستمرتين على $x_0 \in \mathrm{I}\,;\mathrm{I}$

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(x) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} g(x) = 0$$

و g و f قابلتين للإشتقاق عند x_0 و $g'(x) \neq 0$ فإن

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

مثال:

$$\lim_{\mathrm{x}\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0} \quad \text{ح ع ت}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = x^3 - 1 \qquad g(x) = x - 1$$

$\boldsymbol{g,f}$ **دالتين كثير حدود مستمرتين و قابلتين للإشتقاق على R**

$$\lim_{\mathrm{x}\to 1} x^3 - 1 = 0 \ \text{و}\ \lim_{\mathrm{x}\to 1} x - 1 = 0$$

بتطبيق نظرية لوبيطال

$$\lim_{\mathrm{x}\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{\mathrm{x}\to 1} \frac{(x^3-1)'}{(x-1)'} = \lim_{\mathrm{x}\to 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

مثال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}$$

بتطبيق نظرية لوبيطال

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{6x}=-\frac{1}{6}$$

2)-الدوال الأسية و اللوغاريتمية:

1-2 الدالة اللوغاريتمية :

تعريف: الدالة اللوغاريتمية هي كل دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ نحو R

و يرمز لها بالرمز ln و تحقق

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\qquad ln1=0,\qquad (lnx)'=\frac{1}{x}$$

ln دالة معرفة و مستمرة على $]0,+\infty[$

خواص :

ليكن y,x عددين موجبين تماما لدينا :

$$lnxy=lnx+lny\ ;\ ln\frac{1}{x}=-lnx\ ;\ ln\frac{x}{y}=lnx-lny\ ;\ lnx^2=2lnx$$

بعض النهايات :

$$\lim_{x\to 0}lnx=-\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}lnx=+\infty;\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ x}{x^{\propto}}=0\,,\quad \propto>0$$

الدالة الأسية :

تعريف : الدالة الأسية ذات الأساس a , $(a>0)$ هي دالة معرفة كما يلي .

$$f:R\to R$$

$$x\to f(x)=a^x=e^{xlna}$$

هذه الدالة معرفة و قابلة للإشتقاق على R

حساب المشتقة

$$(a^x)' = (e^{xlna})' = lnae^{xlna} = lnaa^x$$

مثال :

$$(4^{\boldsymbol{x}})' = ln(4)4^x$$

$$f(x) = 5^{\boldsymbol{x}}\sqrt{(\boldsymbol{x^2+2})}\ ;\ f'^{(x)} = 5^x ln5\sqrt{(x^2+2)} + 5^x\frac{2x}{2\sqrt{(x^2+2)}}$$

$$= 5^x\left(ln5\sqrt{(x^2+2)} + \frac{x}{\sqrt{(x^2+2)}}\right)$$

حالة خاصة :الدالة الأسية ذات الأساس $\boldsymbol{e}$

$$e^0 = 1, lne^x = x\ , e^{lnx} = x\ ; \forall x, y \in R, e^{x+y} = e^x.e^y, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\forall x \in R, \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

بعض النهايات :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\ , \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty\ \ \alpha \in R$$

مثال : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{lnx^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}lnx} = e^0 = 1$