ملخص حول التكامل و الدوال الاصلية

الدالة الاصلية

1) تعريف:

الدالة F أصلية للدالة f على المجال I هذا يعني أن: $F'(x)=f(x)$

مثال

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{4x^2}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{-1}{4x}$

2) خواص الدوال الأصلية:

- شرط وجود دالة أصلية F للدالة f على المجال I: الدالة f مستمرة على المجال I
- عدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I: غير منتهية أي $F(x)+k$ و k عدد حقيقي

مثال

لدينا : $f(x)=x^4-x^3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+k \;\; ; \;\; k\in\mathbb{R}$$

خاصية : f دالة مستمرة على مجال I . x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي .

توجد دالة أصلية و حيدة F للدالة f على المجال I

تحقق الشرط : $F(x_0)=y_0$

مثال

تكامل الدالة $2x - 3$ هو $x^2 + 3x + c$، وكما رأينا سابقاً. وبالتالي فإن قيمة ذلك التكامل عندما $x = 2$ مساوياً إلى 7 يعني أن:

$$(2)^2 + 3\,(2) + c = 7$$

أي أن:

$$4 + 6 + c = 7$$

$$10 + c = 7$$

$$c = 7 - 10 = -3$$

الدوال الاصلية لبعض الدوال المالوفة

$f(x) =$	$F(x) =$	$\mathrm{I} =$
(a ثابت من $\mathbb{R}$) a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
$(n \in z, n \neq -1)$ x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$]0, +\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$

الدوال الاصلية و العمليات على الدوال

ملاحظات	الدوال الأصلية ل f على المجال I	الدالة f معرفة على مجال I
u لا تنعدم على I	$x \mapsto \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)(u(x))^n, (n \in \mathbb{N}^*)$
u موجبة قطعا على I	$x \mapsto -\frac{1}{u(x)}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u^2(x)}$
u موجبة قطعا على I	$x \mapsto \frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)(u(x))^r, (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$
	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$
	$x \mapsto u(x)+v(x)+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)+v'(x)$
	$x \mapsto u(x)v(x)+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$
	$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$
	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)+c, (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto u'(ax+b), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$
	$t \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$	$t \mapsto \cos(\omega t+\varphi), \omega \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \mathbb{R}$
	$t \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$	$t \mapsto \sin(\omega t+\varphi), \omega \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \mathbb{R}$

التكامل غير المحدود

يوجد للمشتقة عملية معاكس يطلق عليها اسم التكامل. ويرمز للتكامل عادة بالرمز ∫

ونكــتب $\int f(x)\,dx$ والــذي يدعـــى بالتكامل غير المحدد

إذا كانت الدالة $f(x)$ هي مشتقة الدالة $g(x)$ في مجال معين وبالنسبة للمتغير x والذي يعني:

$$g'(x) = f(x)$$

فإننا نسمي الدالة $g(x)$ تكاملاً للدالة $f(x)$ في المجال المفروض.

التكامل المحدود

f دالة متصلة على $[a,b]$ و F دالة أصلية ل f على $[a,b]$. **تكامل الدالة** f من a إلى b هو العدد الحقيقي: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

خواص

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

مثال

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (x + \frac{4}{x+1})dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 4\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + 4\ln\frac{3}{2} - 0 = \frac{1}{8} + 4\ln 3 - 4\ln 2$$

طرق المكاملة

1)التكامل بالتجزئة

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' مستمرتين على I .

من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال

- إيجاد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$:

نضع: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{array} \right.$

ومنه:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 \cdot dx \\ &= \boxed{x \ln x - x + c} \end{aligned}$$

2)طريقة التعويض

مثال

$$\int (2x+3)^4 dx$$

وباستخدام العلاقة $u = 2x + 3$ فإن $x = \frac{u-3}{2}$ وأن $dx = \frac{1}{2} du$ وبالتالي

فإن قيمة التكامل ستصبح:

$$\begin{aligned} \int (2x+3)^4 dx &= \int u^4 . \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^4 du \\ &= \frac{1}{2} . \frac{1}{5} u^5 + c \\ &= \frac{1}{10} u^5 + c \end{aligned}$$

وأخيراً نقوم بالتعويض عن u بدلالة x ليصبح الناتج:

$$\frac{1}{10}(2x+3)^5 + c$$

3)طريقة تبسيط الكسور

مثال

لدينا: $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1-1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$

ومنه لدالة الأصلية لـ g هي الدالة: $x \to x - 2\ln(x+1)$