Chapiter 02: application linéaire

1- Application linéaire

Définition 01 : soient E et F deux espaces vectoriels sur R

Une application linéaire f de E dans F est une application linéaire si et seulement si :

- $\forall$ u , v $\in$ E : f (u + v)= f(u)+ f(v)
- $\forall$ u $\in$ E , $\forall$ λ $\in$ R : f (λ u)= λ f (u)

On dit aussi que f est un **morphisme** d'espace vectoriel

Remarque :

Si f : E→F une application linéaire, alors :

- ✓ F (O_E)= O_F(donc pour démontrer qu une application f n'est pas lineaire il suffit de démontrer que f (O_E) $\neq O_F$)
- ✓ $\forall$ u $\in$ E : f (u)= - f (u)

Exemple 01 : est ce que les applications suivantes sont linéaires ?

- f : $R^3 \rightarrow R^2$ f (x,y,z)=(-2x, y+3z)
- f : $R^3 \rightarrow R^2$ f (x,y)= (x+y , x-2y,1)
- f : R→ R f (x)= x^2

2- Noyau d'une application linéaire

Définition 02 : soit f : E→ F une application linéaire, on appelle noyau de f le sous ensemble de E notée **Ker f** définie par : **Ker f = { x ∈ E / f(x) = $\boldsymbol{O_F}$ }**

Théorème :

Soit f : E→ F une application linéaire, alors on a les propositions suivantes :

- ✓ f est injective si et seulement si **Ker f = {$\boldsymbol{O_F}$}**
- ✓ Ker f est un sous-espace vectoriel de E

Exemple 02 :

- f : $R^3 \rightarrow R^2$ f (x,y,z)=(x+y-z , x-z)
- f : $R^3 \rightarrow R^3$ f (x,y,z)=(2x+y+z , y-z, x-y)

3- Image d'une application linéaire

Définition 03 : soit f : E→ F une application linéaire, on appelle image de f le sous ensemble de F , notée **Im f** définie par :

Im f = {f(x) / ∀ x ∈ E} = vect < f(e1) , f(e2) ….. f(en) > avec dim E = n et {e1,e2,……..en} une base canonique de E .

Théorème :

Soit f : E→ F une application linéaire, alors on a les propositions suivantes :

- f est surjective si et seulement si : Im f = F
- Im f est un sous espace vectoriel de F

Exemple 03 :

- f : R^3 → R^2 f (x,y,z)=(2x+3y , y+2z)

4- Rang d'une application linéaire

Soit f : E→ F une application linéaire.

Définition 04 : le rang de f est égale la démentions de Im f , on écrit : rg (f)= dim Im (f)

Théorème :

Dim E = dim Ker f + dim Im f , donc rg (f)= dim E -dim ker f

Propositions :

f est bijective si f est injective et surjective

on a: f injective ↔ Ker f = $\{O_F\}$ f surjective ↔ Im f = F

Propriétés :

- f est endomorphisme si E=F
- f est isomorphisme si f est bijective
- f est automorphisme si E = F et f bijective

Exemple 04 :

Déterminer Ker f et le rang f

f est-elle est bijective ?

- f : R^3 → R^3 f (x,y,z)=(2x+y, y-z, x-y)
- f : R^3 → R^3 f (x,y,z)=(x+y , x+z , y-z)