الفصل الاول: حركة النقطة المادية

Cinématique du point matériel

1/ تعريفان:

- علم الحركة أو حركيات النقطة المادية هي دراسة الحركة دون التعرض إلى المسببات (كالقوى مثلا.....).
- النقطة المادية هي كل جسم مادي يمكن اعتبار أبعاده معدومة نظريا و مهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة.

2/ تمهيد :

الحركة و السكون مفهومان نسبيان: فالجبل ساكن بالنسبة للأرض و لكنه متحرك بالنسبة لمراقب بعيد عن الأرض و الذي يرى الكرة الأرضية و كل ما عليها في حركة.

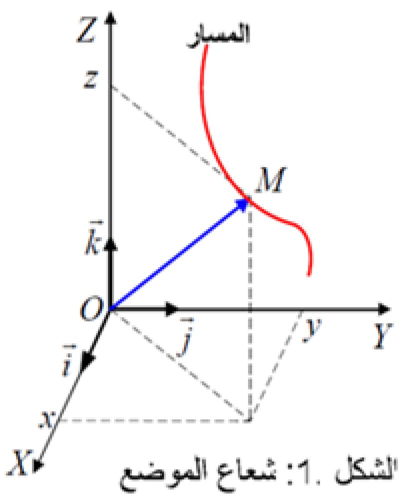
يجب على الدارس لأي حركة تعيين نظام مرجعي (معلم) و الذي تحلل الحركة بالنسبة له. تتم هذه الدراسة على أحد الشكلين:

- شعاعي : باستخدام أشعة الموضع $\overline{OM}$، السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$
- جبري : بتحديد معادلة الحركة وفق مسار معيّن.

3/ موضع المتحرك:(position du mobile)

❖ شعاع الموضع:(vecteur position)

يعرف موضع نقطة مادية M في اللحظة t في معلم فضائي كارتيزي $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (الشكل .1) بشعاع الموضع $\overline{OM}$:



الشكل .1: شعاع الموضع

$$\overline{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

❖ **المعادلات الزمنية**:(équations horaires)

تكون النقطة M في سكون (repos) إذا كانت الإحداثيات x,y,z مستقلة عن الزمن، و تكون في حركة (mouvement) إذا أصبحت هذه الإحداثيات توابع للزمن.
ونرمز لها بـ:

$$\boxed{x(t), y(t), z(t)}$$

نسمي هذه الدوال المعادلات الزمنية للحركة و يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$\boxed{x = f(t), y = g(t), z = h(t)}$$

❖ **المسار**:(trajectoire)

مسار نقطة مادية هو مجموع المواضع المتتالية التي احتلتها خلال أزمنة متعاقبة.
يمكن للمسار أن يكون ماديا (الطريق) أو وهميا (مسار القمر).
دراسة الحركة المستوية تتم بالإحداثيات المستطيلة في المعلم $R(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث يصبح الموضع معرف بإحداثيتين هما: $x(t), y(t)$.

الدالة $x \mapsto y(x)$ تسمى **المعادلة الكارتيزية للمسار**.(équation cartésienne de la trajectoire)

نحصل على معادلة المسار بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين.

مثال 1.: المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية قذفت في الفضاء هي:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases}$$
(كل الوحدات في الجملة الدولية).
1/أوجد المعادلة الكارتيزية للمسار، ما شكله؟
2/ أكتب عبارة شعاع الموضع في اللحظة $t = 2s$.

الجواب: 1/ نستخرج الزمن بدلالة x ثم نعوض في عبارة z فنحصل على معادلة المسار وهو عبارة عن قطع مكافئ.

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$
$$z = -1.25.x^2 + 2.x$$

2/عبارة شعاع الموضع:

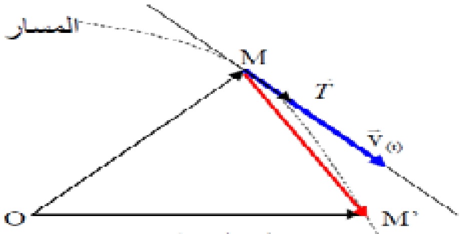
$$\overrightarrow{OM} = (2t).\vec{i} + (-5t^2 + 4t).\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_{(t=2)} = 4\vec{i} - 12\vec{k}$$

4 / شعاع السرعة: (vecteur vitesse)

نعتبر أن السرعة هي المسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن.

❖ **شعاع السرعة المتوسطة:** (vecteur vitesse moyenne)

نلاحظ الشكل 2.4 : بين اللحظة t التي يشغل فيها المتحرك الموضع M و اللحظة 't التي يشغل فيها المتحرك الموضع M' فإن شعاع السرعة المتوسطة معرف بالعبارة التالية:



الشكل .2

$$v_{moy} = \frac{\left|\overrightarrow{MM'}\right|}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t}$$

$\overrightarrow{MM'}$ يسمى شعاع الإنتقال.

❖ **شعاع السرعة اللحظية:** (vecteur vitesse instantanée)

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t، أنه **مشتقة** (dérivée) شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\vec{v}_t = \lim_{t\to t'} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t-t'} = \lim_{t'\to t} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \boxed{\vec{v}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

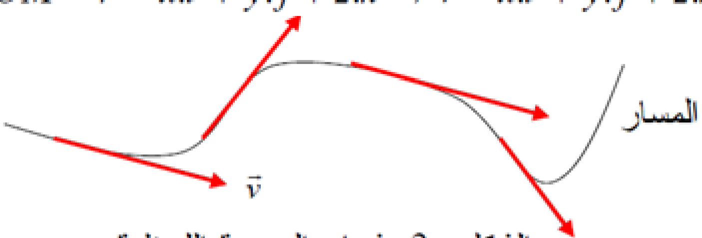
❖ **مصطلحات:**

هام: شعاع السرعة $\vec{v}_{(t)}$ يحمله المماس للمسار في النقطة M و موجه دائما نحو اتجاه الحركة (الشكل .3).

في المعلم الكرتيزي نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة من العبارة الشعاعية للموضع و

ذلك بعملية اشتقاق:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}$$



الشكل .3: شعاع السرعة اللحظية

شدة شعاع السرعة اللحظية: (module du vecteur vitesse instantanée)

$$\boxed{v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

وحدة السرعة في الجملة الدولية هي: $m/s=m.s^{-1}$

إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}$:

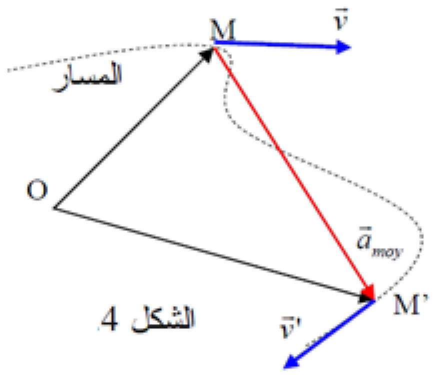
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\rightarrow\vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x}=v_x\\ \dot{y}=v_y\\ \dot{z}=v_z\end{pmatrix}$$

5/ شعاع التسارع: (vecteur accélération)

نعتبر التسارع مقدار تغير السرعة خلال وحدة الزمن.

شعاع التسارع المتوسط: (vecteur accélération moyenne)

إذا اعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t' المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ و شعاعي السرعة اللحظية $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ (الشكل .4) فإن شعاع التسارع المتوسط معرف بالعبارة:



الشكل 4

$$\boxed{\vec{a}_{moy}=\frac{\vec{v}'-\vec{v}}{t'-t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t};\quad a_{moy}=\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}}$$

❖ **شعاع التسارع اللحظي:** (vecteur accélération instantanée)

شعاع التسارع اللحظي لحركة ما يعرّف أنه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن:

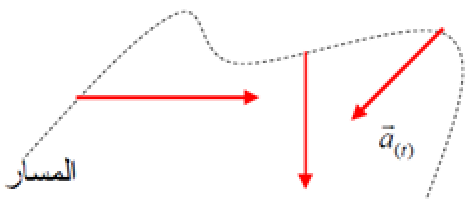
$$\vec{a}=\lim_{t'\to t}\frac{\vec{v}'-\vec{v}}{t'-t}=\lim_{t'\to t}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\qquad\boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

يمكن الآن كتابة العبارة الجامعة للعلاقات بين مختلف الأشعة المميزة للحركة بترميزي كل من نيوتن و ليبنيتز:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}\Rightarrow\vec{v}=\dot{x}.\vec{i}+\dot{y}.\vec{j}+\dot{z}.\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=\ddot{x}.\vec{i}+\ddot{y}.\vec{j}+\ddot{z}.\vec{k}$$

$$\vec{v}=\frac{dx}{dt}.\vec{i}+\frac{dy}{dt}.\vec{j}+\frac{dz}{dt}.\vec{k}\Rightarrow\boxed{\vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}}$$

هام: يكون شعاع التسارع موجها دائما نحو تقعر المسار (الشكل 5.).



الشكل 5.: شعاع التسارع

طويلة شعاع التسارع اللحظي:(module du vecteur accélération instantanée)

تحسب شدة أو طويلة شعاع التسارع بواسطة العبارة :

$$\boxed{a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}$$

الخلاصة: في معلم ديكارتي يمكن كتابة:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x}=v_x \\ \dot{y}=v_y \\ \dot{z}=v_z \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x}=\dot{v}_x=a_x \\ \ddot{y}=\dot{v}_y=a_y \\ \ddot{z}=\dot{v}_z=a_z \end{pmatrix}_R$$

$$\overline{OM}=\vec{r}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}\rightarrow \vec{v}=v_x.\vec{i}+v_y.\vec{j}+v_z.\vec{k}\rightarrow \vec{a}=a_x.\vec{i}+a_y.\vec{j}+a_z.\vec{k}$$

تنبيه: تكون الحركة **متسارعة** إذا كان $\vec{a}.\vec{v}\succ 0$ و **متباطئة** إذا كان $\vec{a}.\vec{v}\prec 0$. أما اتجاه الحركة فيدلّ عليه اتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$.

تمرين :

ينتقل جسم نقطي M وفق المعادلات:
$$\begin{cases} x(t)=5t \\ y(t)=3t+4 \end{cases}$$

1-أوجد معادلة المسار و طبيعته.

2- أوجد أشعة الموضع $\overline{OM}$، السرعة $\vec{V}$ و التسارع $\vec{a}$.

حل التمرين

$$\begin{cases} x(t)=5t \\ y(t)=3t+4 \end{cases}$$

1- معادلة المسار و طبيعته.

$$x = 5t \Rightarrow t = x/5$$
$$y = 3t + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + 4$$

معادلة المسار من الشكل: $y = Ax + B$

- و التي تمثل معادلة مستقيم لا يمر بالمبدأ ميله $\frac{3}{5}$ و يقطع محور التراتيب في النقطة (0,4).

2- عبارة شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t + 4 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = 5t\vec{\imath} + (3t + 4)\vec{\jmath}$$

- عبارة شعاع السرعة $\vec{V}$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow dx = v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0.dt$$

الحركات المستقيمة :

1/الحركة المستقيمة المنتظمة: (mouvement rectiligne uniforme)

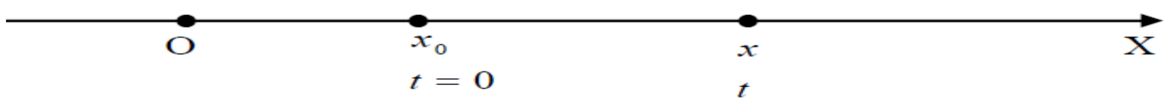
تعريف: تكون نقطة مادية في حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيما و شعاع سرعتها ثابتا و بالتالي فإن شعاع تسارعها معدوم.

❖ المعادلة الزمنية: نختار المحور OX كمعلم، و نحدد الشرط الابتدائي:

$$t = 0 \; ; \; x = x_0$$

انطلاقا من تعريف السرعة و بعملية تكاملية نصل إلى عبارة الفاصلة X بدلالة الزمن:

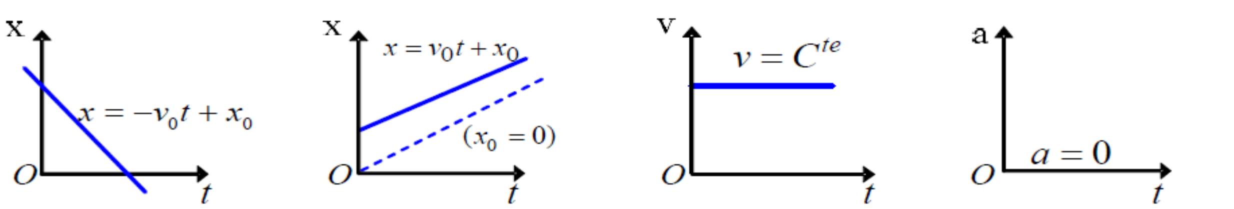
$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow dx = v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0.dt$$



معلم الحركة

❖ مخططات الحركة:(diagrammes du mouvement)

مخططات الحركة هي التمثيل البياني لكل من التسارع و السرعة و الإنتقال بدلالة الزمن.



مخططات الحركة

مثال 4: المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية هي: $x = 2t; y = 2t + 4; z = 0$
برهن أن الحركة مستقيمة منتظمة.
تنبيه: $z = 0 \Leftarrow$ الحركة مستوية. إذا كان $y = 0; z = 0 \Leftarrow$ الحركة خطية.
إذا كان $z \neq 0; y \neq 0; x \neq 0 \Leftarrow$ الحركة فضائية.
الحل: نبرهن أولا أن الحركة مستقيمة؛ من أجل ذلك نبحث عن معادلة المسار فنجد:
$y = x + 4 \Leftarrow$ معادلة مستقيم، إذن الحركة مستقيمة.
حتى تكون الحركة منتظمة لابد أن تكون السرعة ثابتة: نكتب شعاع السرعة باشتقاق شعاع الموضع ثم نحسب شدة السرعة:
$\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.83 ms^{-1}$ إذن الحركة مستقيمة ومنتظمة.

2/ الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام: (mouvement rectiligne uniformément varié)

❖ **تعريف:** تكون حركة نقطة مادية مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما و التسارع ثابتا.

❖ **السرعة الجبرية:** باعتبار الشروط الإبتدائية: $t = 0$; $v = v_0$ و انطلاقا من التعاريف السابقة نكتب: $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \Rightarrow v\big|_{v_0}^{v} = at\big|_0^t$

ونحصل في الأخير على معادلة السرعة اللحظية و هي من الدرجة الأولى للزمن:

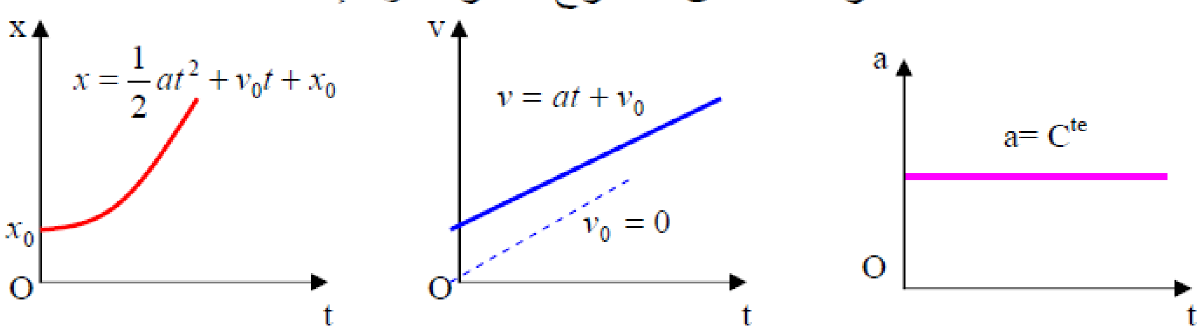
$$\boxed{v = a.t + v_0}$$

❖ **المعادلة الزمنية للحركة:** إذا أخذنا في $t = 0$; $x = x_0$ و انطلاقا مما سبق نكتب: $v = \dfrac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_0)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + v_0)dt$

ومنه فإن المعادلة الزمنية هي: $x = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

❖ **مخططات الحركة:**

نلاحظ مخططات الحركة لكل من التسارع السرعة و الإنتقال.



مخططات الحركة

مثال5: يتحرك جسم وفق المحور OX بسرعة معادلتها: $v = 2t - 6 \ (ms^{-1}) ; t \geq 0$.
ا/إستنتج معادلة التسارع و المعادلة الزمنية لهذه الحركة علما أن في $t = 0$ ، $x = 5m$. ما طبيعة الحركة ؟
ب/ بين الأطوار (متسارعة و متباطئة) للحركة.

الحل: ا/ نحصل على معادلة التسارع باشتقاق عبارة السرعة: $a = \frac{dv}{dt} = 2ms^{-2}$ و هو ثابت.
المعادلة الزمنية للحركة نتوصل إليها بتكامل عبارة السرعة:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v dt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t (2t - 6) \Rightarrow \boxed{x = t^2 - 6t + 5}$$

$$x = x_0 + t^2 - 6t \ ; \ t = 0 \ , \ x = 5 \Rightarrow x_0 = 5$$

ب/أطوار الحركة: نقيم جدولا للتغيرات:

t	0	1	3	5	∞
v		-	0	+	
a		+		+	
x	↘	0	-4	0 ↗	
av		-	0	+	
		الحركة متباطئة	•	الحركة متسارعة	

جدول التغيرات

3/ الحركة المستقيمة متغيرة التسارع: (mouvement rectiligne à accélération variable)

❖ **تعريف**: تكون حركة نقطة مادية مستقيمة و متغيرة التسارع إذا كان المسار مستقيما و التسارع تابعا للزمن: $(a = f(t))$.

مثال 6: ينتقل جسم نقطي وفق مستقيم بتسارع: $a = 4 - t^2$

أوجد عبارتي السرعة و الإنتقال بدلالة الزمن متخذا الشروط التالية:
$t = 3s \ ; \ v = 2ms^{-1} \ ; x = 9m$

الجواب:
للحصول على العبارة الحرفية للسرعة نكامل عبارة التسارع:

$$v = \int_0^t a dt + v_0 \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t (4 - t^2) dt \qquad v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0$$

نكامل من جديد لنحصل على العبارة الحرفية للإنتقال:

$$x = x_0 + \int_0^t v dt \Rightarrow x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - v_0 t + x_0$$

بقي لنا الآن تحديد كل من الفاصلة x_0 و السرعة v_0 الابتدائيتين للجسم. حسب المعطيات، نعوض في العبارتين المتوصل إليهما الزمن بالقيمة $t = 3s$:

$$t = 3s \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}m \quad ; \quad v_0 = -1ms^{-1}$$

في الأخير نكتب عبارتي السرعة و الإنتقال اللحظيين:

$$\boxed{x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}} \qquad \boxed{v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1}$$

4/ الحركة المستقيمة الجيبية: (mouvement rectiligne sinusoïdal)

❖ **تعريف**: تكون الحركة مستقيمة جيبية لنقطة مادية إذا أمكن كتابة المعادلة الزمنية لحركتها بالشكل:

$$\boxed{x = X_m.\cos(\omega.t + \varphi)}$$

أو حتى: $x = X_m.\sin(\omega.t + \alpha)$

x: الفاصلة أو المطال اللحظي، (élongation ou abscisse instantanée)

X_m : السعة أو المطال الأعظمي (amplitude ou élongation maximale): يتغير المطال بين قيمتين حديتين: $-1 \le \cos(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m \le x \le +X_m$

ω : نبض الحركة(pulsation du mouvement)،

φ: الطور الإبتدائي أو الصفحة الإبتدائية(phase initiale)،

$(\omega t+\varphi)$: الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية(phase instantanée) .

السرعة: نشتق المعادلة الزمنية: $v = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = -X_m.\omega \sin(\omega t + \varphi)}$$

تتغير هذه السرعة بين قيمتين حديتين:

$$-1 \le \sin(\omega t + \varphi) \le +1 \Rightarrow -X_m.\omega \le v \le +X_m.\omega$$

❖ **التسارع**: نشتق معالة السرعة: $a = \ddot{x} = \dot{v} = \dfrac{dv}{dt}$

$$\boxed{a = -X_m \omega^2 \cos(\omega.t + \varphi)}$$

يتغير هذه التسارع بين قيمتين حديتين:

$$+X_m \omega^2 \ge a \ge -X_m \omega^2$$

يمكن كتابة عبارة التسارع على النحو التالي:

$$\boxed{a = -\omega^2.x}$$

التسارع يتناسب طردا مع المطال و يعاكسه في الاتجاه.
عكس السرعة، ينعدم التسارع عند مرور المتحرك من موضع التوازن (مبدأ الفواصل)
و يكون أعظميا عند بلوغ المتحرك مطاله الأعظمي.

❖ **المعادلة التفاضلية للحركة**(équation différentielle du mouvement)

انطلاقا من معادلة التسارع يمكن كتابة:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2.x=0}$$

$$a=\ddot{x}=-\omega^2x\Rightarrow\ddot{x}+\omega^2.x=0$$

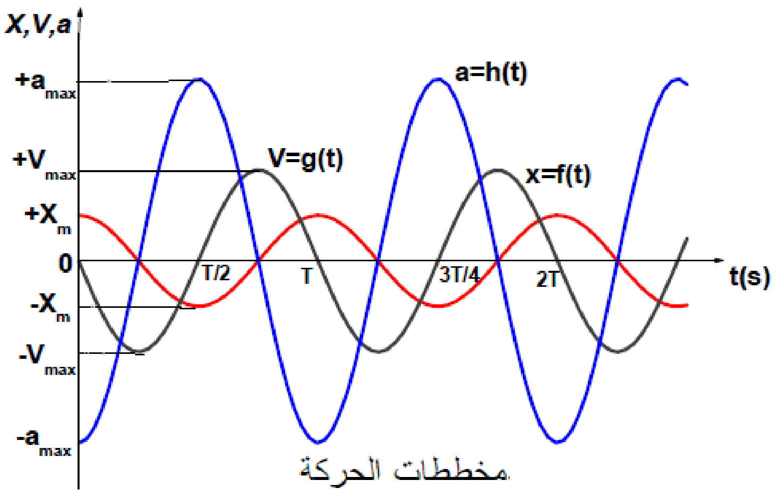
رياضيا حل هذه المعادلة التفاضلية هو من الشكل: $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$. يمكن كتابة هذه المعادلة بعد التحويلات المثلثية على الشكل $x=X_m\cos(\omega t+\varphi)$.

يحدد ثابتا التفاضل X_m و φ بمعرفة الشروط الإبتدائية لكل من المطال x_0 و السرعة v_0 الابتدائيتين؛ حيث نحصل على جملة معادلتين ذات مجهولين تسمح لنا بتعيين X_m و φ.

$$t=0\rightarrow\begin{vmatrix}x_0=X_m\cos\varphi\\v_0=-X_m\sin\varphi\end{vmatrix}$$

❖ **مخططات الحركة:**

يمثل الشكل مخططات كل من الإنتقال ، السرعة ، و التسارع للحركة المستقيمة الجيبية (للتبسيط اخترنا $\varphi=0$).



مخططات الحركة

مثال 7: هزاز جيبي ممثل بالمعادلة: $x=4\sin(0.1t+0.5)$.

أوجد : ا/ السعة، الدور، التواتر و الصفحة الإبتدائية للحركة.

ب/ السرعة و التسارع.

ج/ الشروط الإبتدائية.

د/ الموضع، السرعة و التسارع في $t=5s$.

هـــ/ أرسم مخططات الحركة.

الحل: نطابق المعادلة الزمنية العامة للحركة المستقيمة الجيبية مع المعادلة الزمنية الواردة في نص التمرين.

ا/ السعة، الدور، التواتر و الصفحة الإبتدائية للحركة:

$$\boxed{X_m = 4m}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 20\pi = 62.8s};$$

$$N = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = 1.59.10^{-2}\,Hz};\qquad \boxed{\varphi = 0.5rad}.$$

ب/ حساب السرعة و التسارع:

$$\boxed{v = \dot{x} = 0.4\cos(0.1t + 0.5)}\ ;\ a = \dot{v} = -0.04\sin(0.1t + 0.5) = -0.04x \qquad \boxed{a = -0.04x}$$

ج/ تحديد الشروط الإبتدائية:

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin 0.5 = 1.92m \ \Rightarrow \boxed{x_0 = 1.92m}\ ;$$

$$v_0 = 0.4\cos 0.5 \approx 0.35ms^{-1} \ \Rightarrow \boxed{v_0 = 0.35m}$$

د/ تعيين الموضع، السرعة و التسارع في $t = 5s$:

$$t = 5s:\ x = 4\sin(0.5 + 0.5) \ \Rightarrow \boxed{x = 3.36m}\ ;$$

$$v = 0.4\cos 1 \Rightarrow \boxed{v = 0.22ms^{-1}}\ ;$$

$$a = -0.04\sin 1 \Rightarrow \boxed{a = 0.034ms^{-2}}.$$

هــ/ مخططات الحركة: ننصح الطالب بالتمرن على القيام بها و عدم الإكتفاء بـ إليها.