Chapitre 01 : Intégrales simples et multiples

I. Rappels sur l'intégrale de Riemann et le calcul de primitives.
II. Intégrales doubles et triples.
III. Applications sur le calcul d'aires et volumes

I. Intégrale de Riemann et calcul de primitives

1. Calcul de primitives

a) Définitions et propriétés

Définition 01 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction F est une primitive de f si seulement si $F'(x) = f(x)$ sur I.

Proposition 01 : Si F est une primitive de f Alors : $F + C$ $(C \in \mathbb{R})$ est une primitive de f.

Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f	Primitives $F + C$
$x^n \quad (n \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
x^{-1}	$ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x) + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$

Définition 02 : On appelle intégrale indéfinie de f sur $I \subseteq \mathbb{R}$, l'ensemble des primitives de f .

Et on écrit $\int f(x)dx = F(x) + C$ Avec F une primitive de f , et C une constante .

Définition 03 : On appelle intégrale définie de f sur $[a \quad b]$ le réel noté

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés : Soient f, g deux fonctions continues sur $[a \quad b]$. Et α, β des réels. On a

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad , \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{Si } f \text{ est impaire} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{Si } f \text{ est paire} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, , \quad a < c < b$$

Si $f \geq 0$ sur $[a \quad b]$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si $f \leq g$ sur $[a \quad b]$ Alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

.

La valeur moyenne de f sur $[a \quad b]$ donnée par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

.

b) Méthodes d'intégration :

<u>Intégration par partie</u> : Soient Si u, v deux fonctions de classe C^1 sur $[a \quad b]$.

On a : $\displaystyle\int_a^b u\, v' = [u\, v]_a^b - \int_a^b u' v$

Exemple :

1) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\, dx = ?$ Posons : $\begin{cases} u = x \\ v' = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos(x) \end{cases}$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\, dx = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)dx = \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$$

2) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin(x)dx = ?$ Posons : $\begin{cases} u = \arcsin(x) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases}$

$$\int_0^1 \arcsin(x)\,dx = [x\arcsin(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

<u>Intégration par un changement de variable</u> : Soient f une fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$.

Et $u : J \subseteq \mathbb{R} \to I$, $u(t) = x$ une fonction de classe $C^1(J)$.

Alors : $$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)u'(t)dt$$

.

Exemples :

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = ?$ Posons : $x = u(t) = \sin(t) \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ x = 0 \to t = 0, \quad x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\ \cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\mathrm{t})\,dt$$

$$\cos(2t) = \cos^2(\mathrm{t}) - \sin^2(t) = 2\cos^2(\mathrm{t}) - 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos^2(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\mathrm{t}))$$

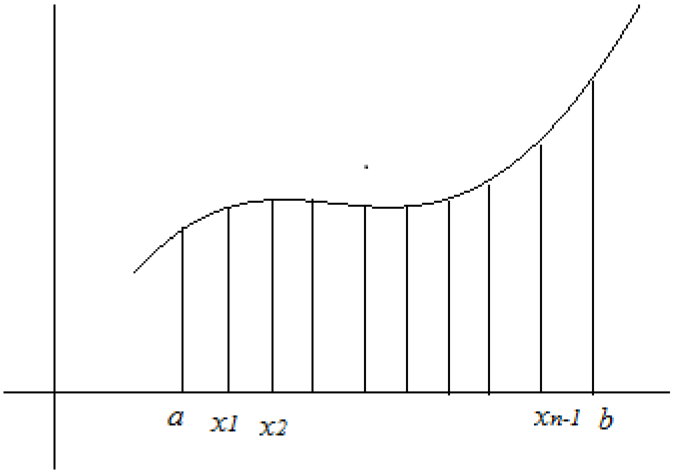
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\mathrm{t})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\mathrm{t}))dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = ?$ Posons : $t = 1+\sqrt{x} \Rightarrow x = (t-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2(\mathrm{t}-1)\mathrm{dt} \\ x = 0 \to t = 1, \quad x = 1 \to t = 2 \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{2(t-1)}{t}dt = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = 2\,[t - ln|t|]_1^2 = 2 - 2\ln(2).$$

2. Intégrale de Riemann :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a \;\; b]$.



Définition 01 : On appelle une subdivision de $[a \;\; b]$ l'ensemble$\{ x_0, x_1, \dots \dots \dots \dots . x_n \}$

Avec : $x_0 = a < x_1 < \dots \dots \dots \dots . < x_n = b$

Définition 02 : On appelle le pas de la subdivision $\Delta_k = \max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$

.

Remarque 01 : Dans cette partie on considère une subdivision régulière.

$$\Delta_k = (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \text{ Et } x_k = a + \frac{b-a}{n} k$$

.

Définition 03 :

$$\text{On appelle } \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$$

$$\text{Et } \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$$

Sommes de Riemann de f sur $[a \;\; b]$.

Définition 04 : On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a \;\; b]$ Si seulement si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ Existe et finie. Et on écrit } \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

.

Théorème 01 : Si f une fonction continue sur un intervalle $[a \ \ b]$, alors les sommes de Riemann

$$(S_n) \text{ et } (s_n) \text{ sont convergentes vèrs } \int_a^b f(x)dx$$

Exemples : Déterminer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{k}{n^2+k^2} \quad , \quad S_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{k}{\sqrt{3n^2+k^2}}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n=+\infty} \frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n \quad \text{Avec } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k/n}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+\frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{cases} b-a=1 \\ f\left(a+\frac{k}{n}\right) = \dfrac{k/n}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \end{cases} \text{On prend} \begin{cases} [a \ \ b] = [0 \ \ 1] \\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

Comme f est continue sur l'intervalle $[0 \ \ 1]$, alors la somme (S_n) est convergente, et

$$S_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(ln(1+x^2)\right)_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n=+\infty} \frac{k}{\sqrt{3n^2+k^2}} = \lim_{n\to+\infty} S_n \quad \text{Avec } S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k}{\sqrt{3n^2+k^2}}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k}{\sqrt{3n^2+k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k/n}{\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+\frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{cases} b-a=1 \\ f\left(a+\frac{k}{n}\right) = \dfrac{k/n}{\sqrt{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \end{cases} \text{On prend} \begin{cases} [a \ \ b] = [0 \ \ 1] \\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}} \end{cases}$$

Comme f est continue sur l'intervalle $[0 \quad 1]$, alors la somme (S_n) est convergente, et

$$S_2 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}dx = \left(\sqrt{3+x^2}\right)_0^1 = 2-\sqrt{3}\ .$$

Calcul de primitives de certaines fonctions :

Intégration des fonctions rationnelles :

Toute fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme et d'éléments simples

$\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$ (premier type) , et $\dfrac{ax+b}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$ (second type) $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Exemple :

1) $\dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4} = x + \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$ Par identification on obtient $a = b = 2$

$\dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+2}$ (Fractions de premier type : le dénominateur admet des racines)

2) $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ (Fraction de second type : dénominateur n'admet pas de racine).

- Intégration de $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} ln|x-a| + c & n = 1 \\ \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + c & n > 1 \end{cases}$

- Intégration de $\dfrac{ax+b}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $I_n = \displaystyle\int \frac{ax+b}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx$ Posons le changement de variable $x = \beta t + \alpha$

$$I_n = \int \frac{a(\beta t+\alpha)+b}{(\beta^2 t^2+\beta^2)^n}\,\beta\, dt = \frac{1}{\beta^{2n-1}}\int \frac{a\beta t + ab\alpha}{(1+t^2)^n}\,dt = \frac{a}{\beta^{2n-2}}\int \frac{t}{(1+t^2)^n}\,dt + \frac{ab\alpha}{\beta^{2n-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Posons $J_n = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $L_n = \displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^n}\,dt$

- Intégration de L_n

$$L_n = \int \frac{t}{(1+t^2)^n}\, dt \qquad \text{Posons } u = 1+t^2 \; L_n = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\, du$$

$$L_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\, ln|u| + c = \frac{1}{2}\, ln|1+t^2| + c & n = 1 \\ \frac{-1}{2(n-1)}\frac{1}{u^{n-1}} + c = \frac{-1}{2(n-1)}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} + c & n > 1 \end{cases}$$

- Intégration de J_n

$$J_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \quad \text{Par partie : } \begin{cases} u = \frac{1}{(1+t^2)^n} \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \\ v = t \end{cases}$$

$$J_n = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt - 2n\int \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$

$$J_n = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt - 2n\int \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\, J_n - 2n\, J_{n+1}$$

On trouve la relation récurrente $\begin{cases} J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{t}{(1+t^2)^n} & n \geq 1 \\ J_1 = \arctan(t) + c \end{cases}$

<u>Intégration des fonctions trigonométriques</u> :

- Intégration des fractions en sin , cos , et tan

Dans ce cas posons le changement de variable : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\arctan(t) \text{ et } dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$\begin{cases} \sin(x) = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right) sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

Exemples :

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1+\cos(x)}\,dx$? Posons $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\quad dx = \dfrac{2t}{1+t^2}\,dt$, $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{1+\cos(x)}\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2t}{1-t^2} = \left[-ln|1-t^2|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -ln\left|1-\frac{1}{3}\right| = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

- Intégration de $f(x) = \sin^p(x)\cos^q(x)$

1) p pair, q impair : Posons le changement $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)\,dx$

Exemple :

$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx = \int \sin^2(x)\,(1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx = \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3(x) - \frac{1}{5}\sin^5(x) + c$$

2) p impair, q pair : Posons le changement $t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x)\,dx$

Exemple :

$$\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx = \int \sin(x)(1-\cos^2(x))\cos^2(x)dx = \int (t^2-1)t^2dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + c$$
$$= \frac{1}{5}\cos^5(x) - \frac{1}{3}\cos^3(x) + c$$

3) p et q impairs : Posons $t = \cos(x)$ ou $t = \sin(x)$ (les deux sont valables).

4) p et q pairs : Dans ce cas écrivons $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en fonction de $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$.

Exemple

$\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx$?

On a $\begin{cases}\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2x)) \\ \sin^2(x) = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\end{cases}$

$$\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\left(1-\cos^2(2x)\right) = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{2}(1+\cos(4x))\right] = \frac{1}{8}(1-\cos(4x))$$

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos(4x))dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c.$$

Intégration des fonctions exponentielles :

Dans les fonctions exponentielles (fractions ou polynômes) on pose le changement suivant :

$t = e^x$, $dt = e^x dx$ et $dx = \frac{dt}{t}$

Exemple :

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{t}{1+t}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - ln|1+t| + c = e^x - ln\,|1+e^x| + c$$

.

II. Intégrale double :

1) Intégrale double sur un rectangle

Définition 01 : Soient f une fonction a deux variables continue sur $[a \quad b] \times [c \quad d]$

Et $\{x_0,\ x_1 \ldots ,\ x_n\}, \{y_0,\ y_1 \ldots ,\ y_n\}$ subdivisions régulières de $[a \quad b]$et $[c \quad d]$ .resp.

Les pas des subdivisions sont : $\Delta_x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $\Delta_y = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{n}$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i \ , \qquad y_j = c + \frac{d-c}{n}j$$

On dit que f est intégrable sur $[a \quad b] \times [c \quad d]$ ssi la limite suivante existe et finie .

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta_x\Delta_y f(x_i, y_j)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j)\right)$$

Et on écrit $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j)\right)$

Exemple : $I = \int_0^1\int_0^1 xe^y\,dx\,dy = ?$

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{i}{n},\frac{j}{n})\right)$$

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\ e^{\frac{j}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i)\ \sum_{j=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^j\right)$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{n(n+1)}{2} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^j = e^{\left(\frac{1}{n}\right)}\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1} \end{cases}$$

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{2}\ \frac{n(n+1)}{n^2}\ \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right) = \frac{e-1}{2}.$$

Théorème de Fubini : Soit f une fonction continue sur un domaine $D = [a \quad b] \times [c \quad d]$.

$$\text{On a : } \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

.

Exemple : $I = \int_0^1\int_0^1 (2x+y)dxdy = ?$

$$\begin{cases} I = \displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 (2x+y)dx\right)dy = \int_0^1 (1+y)dy = \frac{3}{2} \\ I = \displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 (2x+y)dy\right)dx = \int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2) **Intégrale double sur un domaine non rectangulaire :** Soit f une fonction continue sur un Domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

D Se représente sous l'une des formes suivantes :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad a \le x \le b \text{ et } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\ \}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \quad c \le y \le d \text{ et } \varphi(y) \le x \le \psi(y)\ \}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemples :

1) $I = \iint_D (y)dxdy = ?$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , \quad x \geq 0 , y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$

$$\begin{cases} I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} ydy \right) dx = \dfrac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \dfrac{1}{6} \\ \text{ou} \\ I = \int_0^1 y \left(\int_0^{1-y} dx \right) dy = \int_0^1 (y - y^2)dy = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

3) Propriétés de l'intégrale double :

Soient f, g deux fonctions continues sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$, et α, β deux réels. On a :

1) $\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ Avec $D = D_1 \cup D_2$

.

3) Si $f \geq 0$ sur D Alors $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

4) Si $f \geq g$ sur D Alors $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

5) $\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

.

6) $\iint\limits_{[a\ \ b]\times[c\ \ d]} f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b f_1(x)dx \right) \left(\int_c^d f_2(y)dy \right)$ Avec $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

Exemple : $\quad I = \int_0^1 \int_0^1 \dfrac{2x + y}{1 + x^2} dxdy = ?$

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{2x+y}{1+x^2}dxdy=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{2x}{1+x^2}+\frac{y}{1+x^2}\right)dxdy=2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\left(\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right)\left(\int_0^1 ydy\right)$$

$$I=\left(ln(1+x^2)\right)_0^1+\left(\arctan(x)\right)_0^1\left(\frac{1}{2}y^2\right)_0^1=\ln(2)+\frac{\pi}{8}$$

.

4) Intégration double par un changement de variables : f fonction continue sur $D\subseteq\mathbb{R}^2$.

Changement affine : Soit $\varphi:\ \mathbb{R}^2\ \to\mathbb{R}^2$, bijective . $\varphi(u,v)=(x,y)$ On a :

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f\big(\varphi(u,v),\varphi(u,v)\big)|J|dudv\ \text{ Avec : } \Delta=\varphi^{-1}(D)\text{ , et } J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Exemple : $I=\iint\limits_D(x+y)dxdy$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ 1\le x-y\le 2\ ,-1\le x+3y\le 1\}$

Posons : $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}(3u+v)\\ y=\frac{1}{4}(-u+v)\end{cases}$, $\begin{cases}J=\frac{1}{4}\\ \Delta:\ 1\le u\le 2\ ,-1\le v\le 1\end{cases}$

$$I=\frac{1}{8}\iint\limits_\Delta(u+v)dudv=\frac{1}{8}\iint\limits_\Delta ududv+\frac{1}{8}\iint\limits_\Delta vdudv=\frac{1}{8}\left(\int_1^2 udu\right)\left(\int_{-1}^1 dv\right)+\frac{1}{8}\left(\int_1^2 du\right)\left(\int_{-1}^1 vdv\right)$$

$$I=\frac{1}{8}\left(\int_1^2 udu\right)\left(\int_{-1}^1 dv\right)+\frac{1}{8}\left(\int_1^2 du\right)\left(\int_{-1}^1 vdv\right)=\frac{3}{8}.$$

Changement aux coordonnées polaires

$\begin{cases}x=rcos(\theta)\\ y=rsin(\theta)\end{cases}$, $J=r$, $\Delta=\varphi^{-1}(D)$ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f(rcos(\theta),rsin(\theta))rdrd\theta$

Exemple : $I=\iint\limits_D xydxdy$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\quad x>0,y>0\ ,x^2+y^2\le 1\ \}$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \ , \ J = r \ , \ \Delta : \ 0 \le r \le 1 \ , \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

.

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)) dr d\theta = \left(\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\, d\theta\right) = \frac{1}{8}$$

.

Calcul d'aire :

soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$. Aire de D est donnée par : $A(D) = \iint_D dxdy$

Exemple : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < 1 \text{ et } 0 < x < e^y\}$

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_0^1 \int_0^{e^y} dxdy = \int_0^1 e^y dy = e - 1$$

III. Intégrales triples :

Soit f une fonction continue sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Définition 01 : On appelle intégrale triple de f sur D le réel noté : $I = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$

.

Théorème de Fubini : Soit $D = [a \ \ b] \times [c \ \ d] \times [p \ \ q] \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_p^q \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right) dz\right) dy$$

$$= \int_p^q \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right) dx\right) dz$$

Intégration triple par un changement de variables :

Coordonnées cylindriques : $\varphi : \begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \\ z = z \end{cases}$, $\Delta = \varphi(D)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, $J = r$

$$I = \iiint_{\Delta} f(rsin(\theta), rsin(\theta), z)|J|drd\theta dz$$

Exemple : $\iiint_{D} zdxdydz \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ 0 \leq z \leq 1 \ \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2\}$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ 0 \leq z \leq 1 \ \text{ et } x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

$I =$ Passons aux coordonnées cylindriques : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \\ z = z \end{cases}$ $, J = r, \begin{cases} 0 \leq r \leq z \leq 1 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \int_0^z \int_{-\pi}^{\pi} zd\theta drdz = \left(\int_0^1 z\left(\int_0^z dr\right)\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right) = 2\pi \int_0^1 (z^2)dz = \frac{2\pi}{3}$$

<u>Coordonnées sphériques</u> :

$$\varphi : \begin{cases} x = rcos(\theta)\cos(t) \\ y = rsin(\theta)\cos(t) \\ z = rsin(t) \end{cases} \quad |J| = r^2\cos(t)\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_{D} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Delta} f(rcos(\theta)\cos(t), rsin(\theta)\cos(t), rsin(t))|J|drd\theta dt$$

Exemple : $\iiint_{D} zdxdydz \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$I = \iiint_{D} zdxdydz = \iiint_{\Delta} rsin(t)r^2\cos(t)\,drd\theta dt = \left(\int_0^1 r^3dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\, 2\pi\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

.

Calcul de volume :

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$. Le volume de D donné par : $V(D) = \iiint_D dxdydz$

Exemple : Le volume d'une sphère de rayon $R = 1$.

$V(D) = \iiint_D dxdydz \quad D : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Utilisons les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = rcos(\theta)\cos(t) \\ y = rsin(\theta)\cos(t) \\ z = rsin(t) \end{cases} \qquad 0 < r \leq 1\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$V(D) = \iiint_\Delta r^2 \cos(t)\, drd\theta dt = \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt\right) = \frac{4\pi}{3}$$

.