Exercice 1 :

1) * $\Phi(0,52) = 0,6985$

* $\Phi(1,51) = 0,93448$

* $\Phi(-1,93) = \int_{-\infty}^{-1,93} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{1,93}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (à cause de la symétrie de $f(t)$)

or $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1,93} f(t)\,dt + \int_{1,93}^{+\infty} f(t)\,dt$

d'où : $\Phi(-1,93) = \int_{1,93}^{+\infty} f(t)\,dt$

$= 1 - \int_{-\infty}^{1,93} f(t)\,dt.$

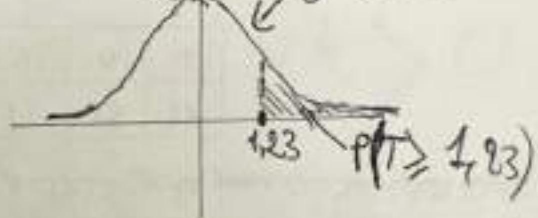
$= 1 - \Phi(1,93).$

2) * $P(T \geq 1,23) = 1 - P(T \leq 1,23)$

$= 1 - \Phi(1,23).$

$= 1 - 0,8907.$

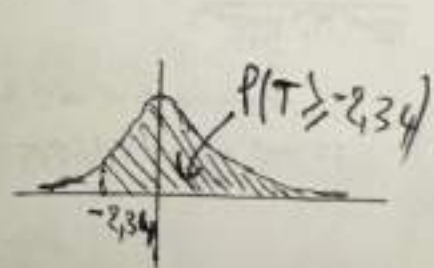
$P(T \geq 1,23) = 0,1093.$



* $P(T \geq -2,34) = 1 - P(T \leq -2,34).$

$= 1 - [1 - \Phi(2,34)].$

$= 0,99036.$



3) * $P(2,1 \leq T \leq 4,5) = \Phi(4,5) - \Phi(2,1) = 0,99997 - 0,98214 = 0,01783.$

* $P(-1,25 \leq T \leq -0,36) = \Phi(-0,36) - \Phi(-1,25)$

$= 1 - \Phi(0,36) - [1 - \Phi(1,25)]$

$= \Phi(1,25) - \Phi(0,36).$

$= 0,2538.$

4) $P(T \leq t_1) = 0,2577.$

Puisque $0,2577 \leq \frac{1}{2}$ alors $t_1 < 0$, d'où $P(T \leq t_1) = 1 - \Phi(-t_1) = 0,2577$

alors $\Phi(-t_1) = 0,7422 = \Phi(0,65) \Rightarrow -t_1 = 0,65$ et $t_1 = -0,65.$

...rcice 2 : ① $X \sim \mathcal{N}(\mu = 400 ; \sigma = 15,4)$.

Soit $T = \frac{X - 400}{15,4}$ alors $T \sim \mathcal{N}(\mu = 0 ; \sigma = 1)$

① On a : $P(X > x) = P(T\sigma + \mu > x)$.

$= P\left(T > \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ (On pose $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$).

$0,67 = P(T > t)$

$t = ?$

On a : $P(T > t) = 0,67 \Leftrightarrow 1 - P(T \leq t) = 0,67$.

$\Leftrightarrow P(T \leq t) = 0,33 < \frac{1}{2}$

alors $t < 0$.

De la même méthode de l'exercice 1, on obtient :

$P(T \leq t) = 1 - \phi(-t) = 0,33$

alors : $\phi(-t) = 0,67$. $(-t > 0)$

D'après la table on obtient :

$-t = 0,44 \Leftrightarrow t = -0,44$.

Or : $x = t\sigma + \mu = -0,44 \times 15,4 + 400 = 393$.

② Application : La taille des élèves suit $X \sim \mathcal{N}(150, 20)$

* $P(140 \leq X \leq 170) = P\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{X - 150}{20} = T \leq 1\right)$ où $T \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$= \phi(1) - \phi\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$= \phi(1) - \left[1 - \phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$= 0,533$

Le nombre d'élèves est alors $0,533 \times 1000 = 533$ élèves.

(car $P(140 \leq X \leq 170)$ représente la proportion théorique des étudiants qui ont une taille entre 140 et 170)

$x_m = ?$

Les 800 élèves représentent 80% de l'effectif total.

On cherche x_m qui vérifie : $P(X \leq x_m) = 0,8$

On a : $P(X \leq x_m) = P\left(T = \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_m - \mu}{\sigma} = t_m\right)$.

$= P(T \leq t_m) = 0,8 > 0,5$ d'où $t_m > 0$

Suivant la table $\Phi(0,85) = 0,8 \Rightarrow t_m = 0,85$.

Or : $x_m = t_m \sigma + \mu = 167$ cm.

<u>Exercice 3</u> : 1) Les 1000 épreuves sont indépendantes, les deux évènement "avoir un garçon" et "avoir une fille" sont exclusifs on déduit que $X \sim \mathcal{B}(1000; p = 0,53)$.

$E(X) = np = 530$ et $V(X) = np(1-p) = 249,1$ et $\sigma(X) = 15,78$

Dans cet exercice, n est assez grand et $0,2 < p < 0,8$ et $np = 530 > 20$. C'est pourquoi il est mieux si l'on utilise la loi normale, qui est une bonne approximation de la loi Binomiale. Il est relativement plus facile de travailler sur la loi normale grâce à la table. Par exemple :

$T(X \leq 350) = \sum_{k=0}^{350} P(X = k) = \sum_{k=0}^{350} C_{1000}^{k} (0,53)^k (0,47)^{1000-k}$

2) $X \sim \mathcal{N}(530; 15,78 = \sigma)$ et $T = \frac{X - 530}{15,78} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$P(X \leq 530) = P\left(T \leq \frac{350 - 530}{15,78}\right) = P(T \leq -11,406)$.

$= 1 - \Phi(11,406)$.

$= 1 - 0,99997$

$= 0,00003$.

$\Phi(11,406)$: On trouve par les logiciels de statistique (R, SPSS, ...)

ercice 4 :

① On choisit une personne au hasard, on lui fait un examen et la proba qu'il soit albinos est $0{,}0103 = p$.
Chaque examen est une expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, on répète l'examen avec 100 personnes indépendamment alors

$$X \sim \mathcal{B}(100 ; p = 0{,}0103).$$

ⓐ $P(X=0) = C_{100}^{0}\, p^{0} (1-p)^{100} \simeq 0{,}355$

Intépretation : la probabilité de ne pas trouver des albinos dans un échantillon de 100 personnes est : 0,355.

ⓑ $P(X=5) = C_{100}^{5}\, p^{5} (1-p)^{100-5} \simeq \alpha$

interpretation : la probabilité qu'ils soient 5 albinos dans un echantillon de 100 personnes est : α.

ⓒ $E(X) = np = 100 \times 0{,}0103 = 1{,}03$ et $V(X) = npq$ où $q = 1-p$

② $X \sim \mathcal{P}(1{,}03)$ (loi de Poisson de param $\lambda = 1{,}03$.)

$* \; P(X=0) = e^{-1{,}03} \dfrac{(1{,}03)^{0}}{0!} \simeq 0{,}357$

Le résultat est très proche de celui du cas où $X \sim \mathcal{B}(100, p)$ car $p < 0{,}1$ et $n > 30$ (On peut rapprocher la loi Binomiale par loi de Poisson.)

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k}}{k!} \quad (k = 1, 2, 3 ; 4 \text{ et } 5).$$