حل السلسلة 04 (حل جمل معادلات خطية)

التمرين الاول

(1

يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات بالصورة التالية

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(2

يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات بالصورة التالية

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

التمرين الثاني

(1

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},\ \ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{7}{4}, \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{13}{4}$$

(2

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 17 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 17 & 8 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 1*5*8 + 2*3*1 + 3*2*$$
$$0 - 3*5*1 - 1*3*0 - 2*2*8 = -1$$

$$|A_1| = \left| \begin{matrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 17 & 0 & 8 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \\ 17 & 0 \end{matrix} = 5*5*8 + 2*3*17 + 3*3*$$
$$0 - 3*5*17 - 5*3*0 - 2*3*8 = -1$$

$$|A_2| = \left| \begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 17 & 8 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 17 \end{matrix} = 1*3*8 + 5*3*1 + 3*2*$$
$$17 - 3*3*1 - 1*3*17 - 5*2*8 = 1$$

$$|A_3| = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 17 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 1*5*17 + 2*3*1 + 5*2*$$
$$0 - 5*5*1 - 1*3*0 - 2*2*17 = -2$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1, y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1 \;, z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2$$

وبذلك فان $x = 1$ و $y = -1$ و $z = 2$.

التمرين الثالث

لكي تكون الجملة لكرامر يجب ان يكون محدد المصفوفة المربعة الموافقة لا يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \text{ ،}$$

معناه

$$a \neq \pm 1.$$

و في هذه الحالة بتطبيق قاعدة كرامر نجد

$$x = \frac{4a-1}{a^2-1}$$

و نجد

$$y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}.$$

في حالة $a = 1$ او $a = -1$ الجملة تصبح

$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ 2x + 2y &=& 1 \end{array} \right.$ او $\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y &=& 2 \\ 2x - 2y &=& 1 \end{array} \right.$ الجملتان لا تقبلان حلول.

التمرين الرابع

1)

لدينا في المثال السابق:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

أولا: نقوم بكتابة جملة المعادلات الخطية على شكل مصفوفة موسعة، كالتالي:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

ثانيا: نقوم بعمليات أولية على المصفوفة الموسعة بحيث تصبح المصفوفة A مصفوفة الوحدة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{2}L_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 = L_3 - 5L_1]{L_2 = L_2 - 3L_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 = 2L_2}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - \frac{3}{2}L_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = -\frac{1}{7}L_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 = L_2 - 10L_3}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - \frac{1}{2}L_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

إذن لجملة المعادلات السابقة **حل وحيد** هو: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$، أي: $x_1 = 1$، $x_2 = 2$، $x_3 = -3$.

(2

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =3 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & =-4 \\ 2x_1 & +5x_2 & +10x_3 & =-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =3 \\ & x_2 & +2x_3 & =-1 \\ & 2x_2 & +6x_3 & =-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =3 \\ & x_2 & +2x_3 & =-1 \\ & & +2x_3 & =-2 \end{array}\right.$$

Ce qui donne $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = 2$

التمرين الخامس

(1

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{-2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل الاتي

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{3}{-2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left(\frac{3}{-2}\right) * (-4) + 4 * 5 = 26 \\ \left(\frac{1}{2}\right) * (-4) + (-1) * (5) = -7 \end{array}$$

وبذلك فان x=26 و y=-7.

(2

لنضع:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\3&2&2\\5&4&3\end{pmatrix}،X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}،B=\begin{pmatrix}10\\1\\4\end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة A محسوب سابقا: $A^{-1}=\frac{(A^*)^t}{det(A)}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&-11&6\\1&16&-10\\2&-3&1\end{pmatrix}$

إيجاد حلول المعادلات الخطية:

$$X=A^{-1}.B=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&-11&6\\1&16&-10\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\1\\4\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-20-11+24\\10+16-40\\20-3+4\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-7\\-14\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

إذن لجملة المعادلات السابقة **حل وحيد** هو: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$، أي: $x_1=1$، $x_2=2$، $x_3=-3$.