المحور الخامس:

حل جملة معادلات خطية

1) تعاريف.

نسمي جملة معادلة خطية ذات m مجهول $x_1, x_2, \dots, x_m$ الجملة:

$$(1) \dots\dots\dots\dots\dots \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

حيث b_i و a_{ij} عناصر من الحقل $\mathbb{R}$ مع $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, m$.

المصفوفة $A = (a_{ij})$ تسمى مصفوفة الجملة و رتبتها تسمى رتبة الجملة.

الشعاع $B = (b_i)$ الطرف الثاني للجملة.

عندما $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ نقول أن الجملة متجانسة و هي تقبل على الأقل الحل الصفري.

الكتابة المصفوفية للجملة: نكتب الجملة (1) بالشكل: $AX = B \dots\dots\dots\dots (2)$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2m} \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$$

و بالتالي حل الجملة (1) يؤول إلى إيجاد الشعاع X حل المعادلة (2) .

2) طرق حل جملة معادلات خطية.

1.2) <u>طريقة كرامر الأولى (أو المباشرة):</u> نقول عن الجملة (1) أنها جملة كرامر إذا كان $n = m$ و كانت المصفوفة A قابلة للقلب.

<u>الطريقة:</u> نعتبر الجملة (1) حيث $n = m$ و لتكن الكتابة المصفوفية المرافقة لها رقم (2) .

نقوم بإنشاء مصفوفات $A_1, A_2, \dots, A_n$ انطلاقا من المصفوفة A و الشعاع B .

حيث:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ b_n & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & b_n & \dots\dots\dots & a_{nm} \end{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & b_2 \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & b_n \end{pmatrix}$$

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم يكون للجملة حل وحيد يعطى بالعلاقة:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots\dots\dots, \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

<u>مثال:</u> لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

لدينا : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ، $A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ ، $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ و

$\det A = -17 \neq 0$ ، و منه للجملة حل وحيد يعطى بالشكل :

$$x_1 = = \frac{\det A_1}{\det A} = 1 \quad , \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 2$$

2.2) <u>طريقة قلب مصفوفة المعاملات (طريقة كرامر الثانية):</u> لتكن جملة كرامر حيث $n = m$ و الكتابة المصفوفية المرافقة لها هي المعادلة (2) و منه حل الجملة هو : $X = A^{-1}B$

<u>مثال:</u> لتكن الجملة

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

هي جملة كرامر لأن $n = m = 2$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب لأن $\det A = 4 \neq 0$ ولدينا $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3.2) **طريقة غوص:** لتكن الجملة (1) مرفقة بالكتابة المصفوفية (2) : $AX = B$ حيث A مصفوفة مربعة ولدينا

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

تعتمد طريقة غوس على طرح مضاعفات المعادلة الأولى من المعدلات الأخرى في المرحلة الأولى و طرح مضاعفات المعادلة الثانية من المعادلات الأخرى في المرحلة الثانية ، و هكذا حتى نتحصل على مصفوفة مثلثية علوية و نحل الجملة الجديدة مباشرة.

مثال: لتكن الجملة

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & \dots\dots (1) \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 & \dots\dots (2) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 & \dots\dots (3) \end{cases}$$

الخطوة الأولى : $a_{11} = 1 \neq 0$ (يسمى المفصل, le pivot) ، لدينا :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \vdots 6 \\ 5 & 3 & 4 \vdots 20 \\ 2 & 1 & 3 \vdots 13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \vdots 6 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \vdots 10 \\ 0 & 1 & -1 \vdots -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \vdots 6 \\ 0 & 2 & 1 \vdots 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \vdots 6 \end{pmatrix}$$

و منه حل الجملة السابقة مكافئ لحل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 10 \\ \frac{3}{2}x_3 = 6 \end{cases}$$

فنحصل على : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

ملاحظة : عندما يظهر المفصل المحدوم يجب تغيير تلك المعادلة بالتي تليها مباشرة.