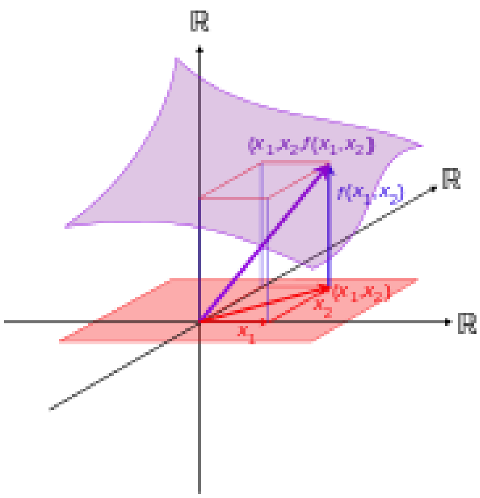
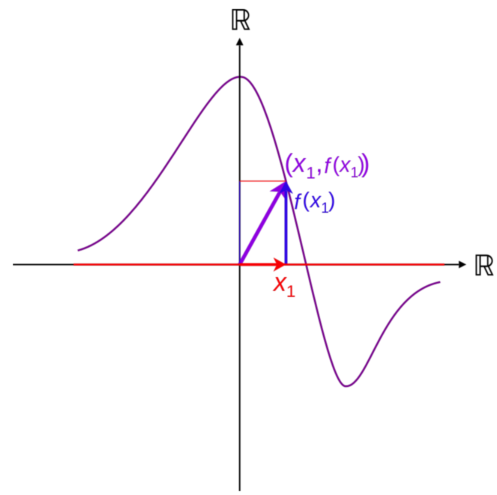
ملخص حول الدوال ذات متغيرين حقيقين





3)- الدوال العددية ذات متغيرين :

تعريف : D جزء من R^2

نسمي دالة ذات متغيرين حقيقيين كل علاقة f من D نحو R *ترفق بكل ثنائية* (x, y) من D العدد الحقيقي الوحيد $f(x, y)$. المجموعةD تسمى مجموعة تعريف الدالة f او ميدان تعريفها و نكتب $f: D \to R$

$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

أمثلة :

$$D_f = R^2 \qquad f(x, y) = x + 2y - 1$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2; x - y > 0\} \qquad f(x,y) = ln(x-y)$$

$$D_f = \{(x,y) \in R^2; 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} \qquad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

1-3 المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى :

f دالة ذات متغيرين معرفة على الميدان D من R^2 . لتكن (x_0, y_0) نقطة ثابتة من D

- نقول أن f تقبل مشتقة جزئبة من الرتبة الأولى بالنسبة ل x في النقطة (x_0, y_0)

إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x\,(x_0, y_0)$$ موجودة

- نقول أن f تقبل مشتقة جزئبة من الرتبة الأولى بالنسبة ل y في النقطة (x_0, y_0)

إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y\,(x_0, y_0)$$ موجودة

مثال :

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 - y^2} \;\; ; \;\; (x_0, y_0) = (1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2 \;\; ; \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -3$$

ملاحظة : لحساب المشتقة الجزئية بالنسبة لأحد المتغيرين نثبت المتغير الثاني ثم نشتق الدالة على أساس انها دالة ذات متغير واحد .

2-3 المشتقة الجزئية من الرتبة الثانية :

إذا كانت f تقبل مشتقتين جزئيتين من الرتبة الأولى في كل نقطة من D و كانت كلا من

$\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ تقبلان بدورهما مشتقتين جزئيتين من الرتبة الأولى . تسمى هذه المشتقات بالمشتقات

الجزئية من الرتبة الثانية و نرمز لها ب :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ أو $$f''_{xx} \;,\; f''_{xy} \;,\; f''_{yy},\; f''_{yx}$$

ملاحظة :

إذا كانت $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ فإن مستمرتين على $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

أمثلة :

$$f(x, y) = 3x^2 + y^3 \ ; \ f''_{xx} = 6 \ , f''_{yy} = 6y \ ; \ f''_{xy} = f''_{yx} = 0$$