حل التمرين الاول

Sol. Nous avons appris que toutes les solutions d'un problème homogène $y'(x) = a(x)y(x)$ sont :

$$y_h(x) = Ce^{A(x)},$$

avec C une constante et $A(x)$ une fonction en x telle que $A'(x) = a(x)$. Donc la seule difficulté dans l'exercice est de trouver $A(x)$, avec la propriété énoncée, pour chaque équation (en faisant toujours attention à l'ensemble de définition) :

1) $A(x) = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}},$

2) $A(x) = \frac{x^3}{3} \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{\frac{x^3}{3}},$

3)

L'équation, à variables séparées, peut être écrite, en séparant les variables :

$$\frac{dy}{1+y} = (2x + 3x^2)\,dx$$

En intégrant séparément chaque membre, on obtient la solution :

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (2x + 3x^2)\,dx$$

$$ln\,|1+y| = x^2 + x^3 + \text{Constante}$$

$$\boxed{y = -1 + c\,e^{x^2+x^3}}$$

4)

) Dans ce cas l'ensemble de définition est $x > 0$. Avec cette condition $A(x) = x\ln(x) - x$ et donc $y_h(x) = Cx^x e^{-x}$ pour toute $x > 0$.

5)

$A(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} \Longrightarrow y_h(x) = Ce^{\frac{\sin^2(x)}{2}}.$

حل التمرين الثاني

$$\Longleftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{1}{x\ln x}$$

$$\Longleftrightarrow \ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln|x|| + c, c \in \mathbb{R}^*$$

1) $\Longleftrightarrow y(x) = k|x^3|\ln|x|, k \in \mathbb{R}.$

b) $(1+e^x)yy' = e^x$, y(0)=1

On peut l'écrire : $(1+e^x)ydy - e^x\,dx = 0$ qui est une équation à variables séparables.

Divisons alors par $(1+e^x)$ pour avoir : $ydy - \frac{e^x\,dx}{(1+e^x)} = 0$

D'où par intégration : $y^2 - 2ln(1+e^x) = C$

Par Hypothèse on a y(0)=1, en remplaçant $x\ par\ 0\ et\ y\ par\ 1$ dans la solution générale on obtient $C = 1 - 2ln2$, ainsi $y^2 = 2ln(1+e^x) + 1 - 2ln2$

$$y^2 = ln(\frac{1+e^x}{2})^2 + 1$$

Par conséquent la solution est $y(x) = \sqrt{ln(\frac{1+e^x}{2})^2 + 1}$

3)

$$\begin{aligned}
(E) \implies & \frac{dy}{dx}(x^2-1) - 2xy = 0 \\
\implies & \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2-1}dx \\
\implies & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}dx \\
\implies & \ln|y| = \ln|x^2-1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\implies & y(x) = k(x^2-1), \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>حل التمرين الثالث</u>

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$:

$$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 2 \text{ et } r_2 = 3$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$

2. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$:

$$\Delta = 4 > 0 \Rightarrow r_1 = -1 \text{ et } r_2 = 1$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}}$

3. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = -2$$

La solution générale est $\boxed{y(x) = (C_1 x + C_2) e^{-2x}}$

4. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r = 0$:

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow r_1 = 0 \text{ et } r_2 = -3$$

La solution générale est

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} y(0) & = & C_1 + C_2 & = & 0 \\ y(1) & = & C_1 + C_2 e^{-3} & = & 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = -C_2 = \frac{e^3}{e^3 - 1}$$

La solution est $\boxed{y(x) = \frac{e^3}{e^3 - 1}(1 - e^{-3x})}$

حل التمرين الرابع

(1

Étape 1 : soit $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 ...(E_0)$ l'équation homogène associée.

Équation caractéristique (EC) est : $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$.

Donc la solution générale de E_0 s'écrit : $y_1 + y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$; $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Étape 2 : On cherche la solution particulière de (E).

On a, $\Delta > 0$ et $\theta = \mu = 0; m = 0$ donc

$y_p(x) = ax^2 + bx + c,$

$y_p'(x) = 2ax + b,$

$y_p''(x) = 2a.$

On remplace dans (E) ce qui implique $a = \frac{1}{2}; b = 0; c = \frac{-1}{2}$.

Ainsi

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1); \ (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(2

Corrigé de l'exercice 4. Résolution de (E_1) : *L'équation caractéristique associée à (E_1) est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 1$. Cette équation admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, par suite la solution générale de l'équation sans second membre est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$y_h(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Puisque le second membre de (E_1) est une fonction polynomiale de degré 3, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3, soit $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ou a, b, c et d sont des réels à déterminer. En calculant y_p'' et y_p', en reportant dans (E_1) il vient

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3$$

et en identifiant les deux polynômes on obtient le système suivant $\begin{cases} 2a = 1, \\ -9a + 2b = 0, \\ 6a - 6b + 2c = 0, \\ 2b - 3c + 2d = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a = 1/2, \\ b = 9/4, \\ c = 21/4, \\ d = 45/8 \end{cases}$ *ainsi une solution particulière est donnée par :* $y_p(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}$.

La solution générale de l'équation avec second membre est définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$y_1(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(3

$$y'' - 3y' = 0 \quad (E')$$

L'équation caractéristique de (E') est : $r^2 - 3r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 3$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{3x}$$

0 est une solution simple de l'équation caractéristique et le degré du polynôme 2 est 0 donc il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax$$

$$\varphi'_P(x) = A \quad \text{et} \quad \varphi''_P(x) = 0$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi''_P(x) - 3\varphi'_P(x) = 2 \Leftrightarrow -3A = 2 \Leftrightarrow A = -\frac{2}{3}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = -\frac{2}{3}x$$

Et la solution générale de (E)

$$\varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x$$

Remarque :

Si on pose $z' = y$ alors (E) devient

$$z' - 3z = 2$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre dont la solution est :

Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

$$\psi(x) = \mu e^{3x} - \frac{2}{3}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer cette équation pour retrouver la solution générale ci-dessus.