Probabilité et statistique pour 1ere année MI

Dr GHORAF NAMIRE
Département MI. Université Larbi Ben M'Hidi Oum EL Bouaghi.

Table des matières

Chapitre 1

Statistique descriptive

1.1 Intoduction

La statistique est une méthode scientifique qui consiste à réunir des données chiffrées sur des ensembles nombreux , puis à analyser , à commenter et à critiquer ces données . Il ne faut pas confondre la statistique qui est la science qui vient d'être définie et une statistique qui est un ensemble de données chiffrées sur un sujet précis. Les premières statistiques correctement élaborées ont été celles des recensements démographiques. Ainsi le vocabulaire statistique est essentiellement celui de la démographie .Les ensembles étudiés sont appelés **population** .Les éléments de la population sont appelés **individus** ou unités statistiques .

1.2 Définitions et vocabulaire

Définition 1. *En statistique on a :*

1. Population *: c'est l'ensemble d'objets ou de personnes d'une étude statistique on la note* **P**.

Par exemple *: *L'ensemble des étudiants du LMD *L'ensemble des voitures renault entre 2000-2007.*

2. ***Echantillon :*** *Un sous ensemble de la population.*

*3. **Individu** : On appelle individu chaque élément de la population étudié on note : ω et on l'appelle aussi **Unité statistique.***

***Par exemple :** * Chacun des étudiants du LMD est un individu * Chacune des voitures renault est un individu.*

*4. **Effectif total** : C'est le nombre total d'individus dans la population noté n ou bien N on l'appelle aussi **La taille de la population.***

Remarque 1.2.1. *Attention la population doit être définie avec précision, c'est totalement différent de considérer :*

a. Les étudiants du LMD

b. Les étudiants de première année

c. Les étudiants à l'université

1.3 Séries statistiques

Chaque population peut être étudiée selon un ou plusieurs caractères. Donc on distingue ici deux types de séries statistiques : **Les séries simples** et **Les séries doubles.**

1.3.1 Séries statistiques simples

Définition 2. ***Caractère (variable statistique) :*** *Soit* **P** *une population donnée. On appelle* ***caractère statistique simple*** *toute application notée X telle que :*

$$\begin{aligned} X &: \mathbf{P} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: \omega \longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

Le* ***caractère* *désigne donc une* ***grandeur*** *ou un attribut, observable sur un individu et susceptible de varier prenant ainsi différents états appelés* ***modalités.***

Types de caractères statistiques

On distingue deux types de caractères statistiques.

1. **Caractère qualitatif :** C'est un caractère non mesurable. Comme exemples : Sexe, Couleur des cheveux, secteur d'activité ......
2. **Caractère quantitatif :** C'est un caractère mesurable . Comme exemples : Nombre d'enfants, la taille d'une personne, le poids ....

Deux types de caractère quantitatif

- **Quantitatif discret :** Le caractère statistique est discret s'il peut prendre seulement un nombre fini de valeurs dans un intervalle donné. En général il résulte d'un comptage ou dénombrement. Par exemple : le nombre d'enfants il peut être : 0, 1, 2, 3. Le nombre d'accidents pour une période donnée, ...etc.
- **Quantitatif continu :** Le caractère est continu s'il peut prendre toutes la valeurs d'un intervalle. En général il résulte d'une mesure.. Par exemple : la taille d'une personne elle peut prendre ses valeurs dans l'intervalle : $[100cm, 200cm]$.

Remarque 1.3.1. *On étudiera que les caractères* ***quantitatifs*** *qui ont des valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Les caractères* ***qualitatifs*** *s'y ramenant par un codage.*

Cas d'un caractère discret

Définition 3. ***Modalité*** *: On appelle une modalité (on dit aussi une valeur du caractère) toute valeur :.* $x_i \in X(\mathbf{P})$ *telle que :* $X(\mathbf{P}) = \{x_1, x_2, ...x_k\}$ *avec* k *est nombre de modalités différentes du caractère* X.

Exemple 1.3.1. *Lors des recensements, les caractères étudiés sont l'****âge****, le* ***sexe****, le type du travail****,...*** *etc. Le caractère « sexe » présente deux modalités alors que pour le type du travail, le nombre de modalités va dépendre de la précision recherchée.*

Remarque 1.3.2. *La population doit être* ***Homogène*** *au regard des caractères étudiés (par exemple la répartition des personnes selon leurs tailles doit distinguer les deux sexes)*

Définition 4. *On appelle : :*

1. ***Effectif d'une modalité :*** *L'effectif de la modalité* x_i *noté* n_i *est le cardinal de l'ensemble* $X^{-1}\{x_i\}$*. C'est à dire* n_i *est le nombre d'individus* ω *tels que* $X(\omega) = x_i$.

2. ***Effectif cumulé :***

a. ***L'effectif cumulé croissant :*** *l'effectif cumulé croissant en un point* $x \in \mathbb{R}$ *noté* $N_x \uparrow$ *est la somme des effectifs des modalités* x_i *tels que* $x_i \leq x$ *c'est à dire :*

$$N_x \uparrow = \sum_{\substack{i \\ x_i \leq x}} n_i$$

c'est à dire $N_x \uparrow$ *est le nombre d'individus* ω *tels que* $X(\omega) \leq x$

b. ***L'effectif cumulé décroissant :*** *l'effectif cumulé décroissant en un point* $x \in \mathbb{R}$ *noté* $N_x \downarrow$ *est la somme des effectifs des modalités* x_i *tels que* $x_i > x$ *c'est à dire :*

$$N_x \downarrow = \sum_{\substack{i \\ x_i > x}} n_i$$

c'est à dire $N_x \downarrow$ *est le nombre d'individus* ω *tels que* $X(\omega) > x$

3. ***Fréquence d'une modalité*** *: la fréquence de la modalité* x_i *noté* f_i *est le nombre défini par :* $f_i = \frac{n_i}{N}$. *(N =la taille de la population)*

Pourcentage de la modalité x_i *noté* p_i *est le nombre* $p_i = f_i \times 100$.

4. ***Fréquence cumulée :*** *la fréquence cumulée en un point* $x \in \mathbb{R}$ *noté* F_x *est la somme des fréquences des modalités* x_i *tels que* $x_i \leq x$ *c'est à dire :*

$$F_x = \sum_{\substack{i \\ x_i \leq x}} f_i$$

Cas d'un caractère continu

Dans le cas d'un caractère statistique continu ou bien si les modalités d'un caractère sont très nombreuses alors, on procède à des regroupements des modalités par des classes de la forme $[a_i, a_{i+1}[$ ou $]a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 1, 2, ..., k$ on a de la même manière :

Définition 5. *On appelle : :*

1. ***Effectif d'une classe :*** *L'effectif de la classe* $[a_i, a_{i+1}[$ *noté* n_i *est le cardinal de l'ensemble* $X^{-1}\{[a_i, a_{i+1}[\}$. *C'est à dire* n_i *est le nombre d'individus* ω *tels que*

$a_i \leq X(\omega) < a_{i+1}$.

2. ***Effectif cumulé :***

a. ***L'effectif cumulé croissant :*** *l'effectif cumulé croissant en un point $x \in \mathbb{R}$ noté $N_x \uparrow$ est toujours défini par :*

$$N_x \uparrow = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} n_i$$

b. ***L'effectif cumulé décroissant :*** *l'effectif cumulé décroissant en un point $x \in \mathbb{R}$ noté $N_x \downarrow$ est*

$$N_x \downarrow = \sum_{\substack{i \\ x_i \geq x}} n_i$$

3. ***Fréquence d'une classe*** *: la fréquence de la modalité $[a_i, a_{i+1}[$ noté f_i est le nombre défini par : $f_i = \frac{n_i}{N}$.*

Pourcentage de la classe *$[a_i, a_{i+1}[$ noté p_i est $p_i = f_i \times 100$.*

4. ***Fréquence cumulée :*** *la fréquence cumulée en un point $x \in \mathbb{R}$ noté F_x est :*

$$F_x = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} f_i$$

Remarque 1.3.3. *on a les égalités suivantes :*

1. $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$ *2.* $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$ *3.*$\sum_{i=1}^{k} p_i = 100$ *4. Pour tout $x \in \mathbb{R} : N_x \uparrow + N_x \downarrow = N$*

Définition 6. ***(Série statistique discrète)*** *on appelle une série statistique discrète associée au caractère statistique X la donnée simultanée dans un tableau des valeurs du caractère X (les modalités x_i) et des effectifs (n_i) (ou bien les fréquences f_i) de ces modalités. c'est à dire la série statistique discrète est la donnée de la famille $\{(x_i, n_i), i = 1, 2, ..., k\}$.*

Définition 7. ***(Série statistique continue)*** *on appelle une série statistique continue associée au caractère statistique X la donnée simultanée dans un tableau des classes du caractère X (les classes $[a_i, a_{i+1}[$) et des effectifs (n_i) (ou bien les fré-*

quences f_i) de ces classes. c'est à dire la série statistique continue est la donnée de la famille $\{([a_i, a_{i+1}[\,, n_i)\,, i = 1, 2, ..., k\}$.

Exemple 1.3.2. *On a les deux exemples suivants :*

1. *On considère la série discrète suivante :*

Modalités x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Effectifs n_i	*4*	*10*	*6*	*4*	*1*	*1*
Effectifs cumulés croissant en x_i : $N_{x_i} \uparrow$	*4*	*14*	*20*	*24*	*25*	*26*
Effectifs cumulés croissant en x_i : $N_{x_i} \downarrow$	*22*	*12*	*6*	*2*	*1*	*0*
Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$	$\frac{4}{26}$	$\frac{10}{26}$	$\frac{6}{26}$	$\frac{4}{26}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{26}$
Fréquence cumulées F_{x_i}	$\frac{4}{26}$	$\frac{14}{26}$	$\frac{20}{26}$	$\frac{24}{26}$	$\frac{25}{26}$	$\frac{26}{26}$

D'après le tableau on a le caractère étudié X possède 6 *modalités* $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$ *et on a ;*

**La taille de la population étudiée est :* $N = \sum_{i=1}^{6} n_i = 4 + 10 + 6 + 4 + 1 + 1 = 26.$

** Pour les effectifs cumulés : par exemple* $N_2 \uparrow = 4 + 10 + 6 = 20$ *et* $N_2 \downarrow = 1 + 1 + 4 = 6$

Et on a aussi $N_{2,5} \uparrow = \sum_{\substack{i \\ x_i \leq 2,5}} n_i = 4+10+6 = 20$ *et* $N_{2,5} \uparrow = \sum_{\substack{i \\ x_i > 2,5}} n_i = 1+1+4 = 6$

** Pour les pourcentages : si on cherche par exemple le pourcentage des individus qui ont la modalité* $x_i = 3$ *on a ;* $p_4 = f_4 \times 100 = \frac{4}{26} \times 100 \backsimeq 15\%$

2. *On considère la série continue suivante :*

Classes $[a_i, a_{i+1}[$	$[5, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60[$	$[60, 70[$
Effectifs n_i	*3*	*12*	*30*	*40*	*15*
Effectifs cumulés croissants en a_{i+1} : $N_{a_{i+1}} \uparrow$	*3*	*15*	*45*	*85*	*100*
Effectifs cumulés décroissants en a_{i+1} : $N_{a_{i+1}} \downarrow$	*97*	*85*	*55*	*15*	*0*
Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{15}{100}$
Fréquence cumulées $F_{a_{i+1}}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{45}{100}$	$\frac{85}{100}$	$\frac{100}{100}$

D'après le tableau on a le caractère étudié X possède 5 *classes* $[a_1, a_2[\, = [5, 10[\,, [a_2, a_3[\, = [10, 20[\,, [a_3, a_4[\, = [20, 40[\,, [a_4, a_5[\, = [40, 60[\,, [a_5, a_6[\, = [60, 70[$ *et on a ;*

*La taille de la population étudiée est : $N = \sum_{i=1}^{5} n_i = 3 + 12 + 30 + 40 + 15 = 100.$

* Pour les effectifs cumulés : par exemple $N_5 \uparrow = 0$ et $N_5 \downarrow = 100$

$N_{10} \uparrow = 3$ et $N_{10} \downarrow = 97$, $N_{20} \uparrow = 3 + 12 = 15$ et $N_{20} \downarrow = 15 + 40 + 30 = 85$

* Pour les pourcentages : le pourcentage des individus qui ont la valeur du caractère dans la classe $[20, 40[$ on a ; $p_3 = f_3 \times 100 = \frac{30}{100} \times 100 = 30\%$

Remarque 1.3.4. *Pour les séries statistiques continues dans le cas où les classes sont données par $[a_i, a_{i+1}[$ alors les effectifs cumulés sont calculées dans le tableaux par les formules :*

$$N_x \uparrow = \sum_{\substack{i \\ x_i < x}} n_i \quad et \quad N_x \downarrow = \sum_{\substack{i \\ x_i \geq x}} n_i$$

1.4 Représentation des données

Il existe plusieurs niveaux de description statistique : la présentation brute des données, des présentations par tableaux numériques, et des représentations graphiques.

1.4.1 Tableaux statistiques

Le tableau de distribution est un mode synthétique de présentation des données. Sa constitution est immédiate dans le cas d'un caractère discret mais nécessite en revanche une transformation des données dans le cas d'un caractère continu.

Caractères quantitatifs discrets

Dans le cas d'un caractère quantitatif discret, l'établissement de la distribution des données observées associées avec leurs effectifs est immédiate. Comme exemple on a :

Les notes sur 20 obtenues lors d'un devoir de mathématiques dans une classe de première année LMD sont les suivantes : 10, 8, 11, 9, 12, 10, 8, 10, 7, 9, 10, 11, 12, 10, 8, 9, 10, 9, 10, 11. Alors d'après ces données on a :

– La population étudiée est : L'ensemble des étudiants de première année LMD
– L'effectif total (la taille de la population) est : $N = 20$
– Le caractère étudié est : La note obtenue au devoir. **Sa nature :** est un caractère quantitatif discret.

La série statistique définie par les effectifs est donnée par le tableau suivant :

x_i	7	8	9	10	11	12
n_i	1	3	4	7	3	2

.

Caractères quantitatifs continues

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, l'établissement du tableau des effectifs (fréquences) implique d'effectuer au préalable une répartition en classes des données. Cela nécessite de définir le nombre de classes attendu et donc l'**amplitude** associée à chaque classe ou **intervalle** de classe. En règle générale, on choisit des classes de même amplitude.

Diverses formules empiriques permettent d'établir le nombre de classes pour un échantillon de taille n.

1. La règle de **STURGE** : Nombre de classes $= 1 + 3,3 \log(n)$ (attention $\log(n)$ est dans la base 10 c à d $\log(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$)
2. La règle de **YULE** : Nombre de classes $= 2,5\sqrt[4]{n}$

et dans les deux cas, on arrondit le résultat à l'entier le plus proche (car un nombre de classes doit être un entier).

l'intervalle ou amplitude de chaque classe est obtenu ensuite de la manière suivante : **Amplitude de la classe**$= \frac{\max(X) - \min(X)}{nombre\ de\ classes}$.

avec $\max(X)$ et $\min(X)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur du caractère X.

A partir de $\min(X)$ on obtient les **limites des classes** ou **bornes des classes** par addition successive de l'amplitude de la classe. En règle général, on tente de faire coïncider l'indice de la classe ou valeur centrale de la classe avec un nombre entier ou ayant peu de décimales.

Exemple 1.4.1. *On a mesuré la taille en centimètres d'un ensemble de personnes et on a trouvé les résultats suivants :*

153	*165*	*160*	*150*	*159*	*151*	*163*
160	*158*	*149*	*154*	*153*	*163*	*140*
158	*150*	*158*	*155*	*163*	*159*	*157*
162	*160*	*152*	*164*	*158*	*153*	*162*
166	*162*	*165*	*157*	*174*	*158*	*171*
162	*155*	*156*	*159*	*162*	*152*	*158*
164	*164*	*162*	*158*	*156*	*171*	*164*
158						

de la même manière, d'après ces données on a :

- La population étudiée est : L'ensemble des personnes.
- L'effectif total (la taille de la population) est : $N = 50$
- Le caractère étudié est : La taille . **Sa nature :** est un caractère quantitatif continue.

* Le nombre de classes est :

Par la règle de **STURGE** : Nombre de classes $= 1 + 3,3 \log(50) = 6,6 \simeq 7$

Par la règle de **YULE** : Nombre de classes $= 2,5\sqrt[4]{50} = 6,64 \simeq 7$

*L'amplitude (l'intervalle) de la classe :

Amplitude= $\frac{174-140}{7} = 4,85$ que l'on arrondit à 5 cm par commodité (on peut la calculer même par : Amplitude= $\frac{174-140}{6,6} = 5,15$ que l'on arrondit aussi à 5 cm). Alors la série statistique définie par les effectifs est donnée par le tableau suivant :

Classes	$[140, 145[$	$[145, 150[$	$[150, 155[$	$[155, 160[$	$[160, 165[$	$[165, 170[$	$[170, 175[$
n_i	1	1	9	17	16	3	3

1.4.2 Représentations graphiques

Les représentations graphiques ont l'avantage de renseigner immédiatement sur l'allure générale de la distribution du caractère étudié. Elles facilitent l'interprétation des données recueillies.

Représentations graphiques des séries statistiques discrètes

Pour les caractères quantitatifs discrets, la représentation graphique est le **diagramme en bâtons** où la hauteur des bâtons correspond à l'effectif n_i (ou bien la fréquence f_i) associé à chaque modalité x_i du caractère étudié X. C'est à dire dans un repère orthogonal (les x_i sur l'axe des abscices et les n_i (ou bien les f_i) sur l'axe des ordonnées), pour chaque valeur de la série statistique on trace un trait vertical dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif n_i (ou bien f_i) donc c'est la présentation grafique des points (x_i, n_i) (ou bien la présentation grafique des points (x_i, f_i).

Représentations graphiques des séries statistiques continues

Pour les caractères quantitatifs continus, la représentation graphique est l'**HISTOGRAMME** où la hauteur du rectangle est proportionnelle à l'effectif n_i de la classe (ou bien la fréquence f_i). Ceci n'est vrai que si l'amplitude de classes est constant. Dans ce cas l'aire comprise sous l'histogramme s'avère proportionnelle à l'effectif total. En revanche lorsque les intervalles de classe sont inégaux, des modifications s'imposent pour conserver cette proportionnalité. Dans ce cas, en ordonnée, au lieu de porter l'effectif (la fréquence respectivement), on indique le rapport de l'effectif (la fréquence respectivement) sur l'amplitude de la classe. Ainsi la superficie de chaque rectangle représente alors l'effectif associé à chaque classe.

Exemple 1.4.2. *1. On prend l'exemple sur la mesure des tailles des personnes. Dans cet exemple on représente la distribution des effectifs (des fréquences respectivement) par un histogramme.*

2. Soit la série statistique donnée par le tableau suivant :

Classes	$[0,5[$	$[5,10[$	$[10,20[$	$[20,40[$	$[40,55[$
n_i	*3*	*12*	*30*	*40*	*15*

Dans cette exemple on remarque que les classes n'ayant pas la même amplitude donc on doit d'abord choisir l'unité de mesure qui est 5 *ici (la plus petite amplitude) ensuite on doit calculer les effectifs des autres classes dans l'unité de mesure. Alors pour les classes* $[10,20[$, $[20,40[$, *et* $[40,55[$ *on a :*

l'amplitude de la classe $[10, 20[= 10 = 2 \times 5$ *alors son effectif dans l'unité de mesure est* $\frac{n_3}{2} = \frac{30}{2} = 15$ *(c'est à dire on considère que cette classe est constituée des deux classes* $[10, 15[$ *et* $[15, 20[$ *contenant chacune* 15 *individus).*

l'amplitude de la classe $[20, 40[= 20 = 4 \times 5$ *alors son effectif dans l'unité de mesure est* $\frac{n_4}{4} = \frac{40}{4} = 10$ *(c'est à dire on considère que cette classe est constituée des quatres classes* $[20, 25[$, $[25, 30[$, $[30, 35[$ *et* $[35, 40[$ *l'effectif de chacune est* 10 *).*

l'amplitude de la classe $[40, 55[= 15 = 3 \times 5$ *alors son effectif dans l'unité de mesure est* $\frac{n_5}{3} = \frac{15}{3} = 5$.

Remarque 1.4.1. *Pour une série statistique continue (dans le cas où les classes sont nombreuses) on peut regrouper des classes et dans ce cas l'effectif sera la somme des effectifs des classes regroupées. Par exemple dans l'exemple sur la taille des personnes si on regroupe les deux premières classes ensembles et la troisième avec la quatrième et les trois dernières ensembles alors on obtient la nouvelle série suivante :*

Classes	$[140, 150[$	$[150, 160[$	$[160, 175[$
n_i	2	26	22

et on peut la traiter comme une nouvelle série avec trois classes.

Représentations des séries statistiques par des boites à moustaches

Toute série statistique peut être représenté par une boite qu'on l'appelle boite à moustaches et on peut lire sur cette boites le premier quartile, 3eme quartile , la médiane, $\min(X)$ et $\max(X)$ de la série statistique étudiée.

Représentations graphiques des effectifs cumulés

La représentation graphique des effectifs cumulés (ou bien les fréquences cumulées) pour les deux types de séries statistiques (discrètes ou continues) est la même et on les représente par **Le diagramme en bâtons et le polygone.** C'est à dire dans un repère orthogonal :

– Pour une série discrète on place les x_i sur l'axe des abscices et les $N_{x_i} \uparrow$ (ou bien les $N_{x_i} \downarrow$) sur l'axe des ordonnées, et pour chaque valeur x_i de la série statistique on trace un trait vertical dont la hauteur est $N_{x_i} \uparrow$ (ou bien $N_{x_i} \downarrow$) ensuite pour obtenir le polygone on trace un trait entre chaque deux sommets des bâtons..

– Pour une série continue on place les bornes des classes sur l'axe des abscices et les $N_{a_i} \uparrow$ (ou bien les $N_{a_i} \downarrow$) sur l'axe des ordonnées, et pour chaque borne a_i on trace un trait vertical dont la hauteur est $N_{a_i} \uparrow$ (ou bien $N_{a_i} \downarrow$) ensuite pour obtenir le polygone on trace un trait entre chaque deux sommets des bâtons.

Pour la représentation graphique des fréquences cumulées on procède de la même manière seulement on place sur l'axe des ordonnées les fréquences cumulées au lieu des effectifs cumulés.

Exemple 1.4.3. *On représente graphiquement les effectifs cumulés (croissants et décroissants) des deux séries statistiques .*

1. *La série des notes de devoir de mathématiques des étudiants*
2. *La série des tailles des personnes*

1.5 Caractéristiques numériques d'une série statistique

Le dernier niveau de description statistique est le résumé numérique d'une série statistique par des indicateurs numériques ou paramètres caractéristiques numériques. Pour une série statistique on distingue deux types de caractéristiques numériques :

1. Les paramètres caractéristiques de position on les appelle aussi les paramètres de la tendance centrale.
2. Les paramètres caractéristiques de dispersion.

1.5.1 Paramètres de position (tendance centrale)

Il s'agit ici de « compresser » au mieux l'information contenue dans la distribution d'un caractère statistique par un nombre. Les paramètres qui résument la tendance centrale d'une série ou d'une distribution statistique sont : 1. Mode, 2. Médiane, 3. Quartiles , 4. Moyenne.

1. Mode, Classe modale

Définition 8. ***Mode, Classe modale*** *: Le* ***Mode*** *noté Mo d'une série statistique est la valeur du caractère (la modalité) la plus fréquente (c'est à dire la modalité qui possède la plus grande fréquence ou le plus grand effectif).*

Dans le cas d'une série statistique continue le mode est appellé ***Classe modale*** *et c'est la classe qui possède le plus grand effectif.*

Remarque 1.5.1. *1.Une série statistique peut posseder un seul mode et on l'appelle distribution unimodale ou plusieurs modes et on l'appelle distribution multimodale (distribution bimodale ou trimodale....)*

2. On peut aussi utiliser les représentations graphiques des effectifs (des fréquences) pour déterminer le ou les modes d'une série statistique. Alors sur le graphe le mode (la classe modale respectivement) est la valeur (la classe respectivement) de la série qui possède le bâton (le rectangle respectivement) qui possède la plus grande hauteur.

Exemple 1.5.1. *1. Pour la série des notes de devoir de mathématiques des étudiants : D'après le tableau de la série (ou bien d'après le diagramme en bâton des effectifs) le plus grand effectif est $n_4 = 7$ donc le mode de cette série est $Mo = 10$.*

2. Pour la série des tailles des personnes : D'après le tableau de la série (ou bien d'après l'histogramme des effectifs) le plus grand effectif est $n_4 = 17$ donc la classe modale de cette série est $Mo = [155, 160[$.

2. Médiane Me

Définition 9. *La* ***Médiane*** *notée Me d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage la population en deux parties de même effectif. De façon plus précise, la médiane d'une série statistique est la valeur Me du caractère telle qu'au moins 50% des individus aient une valeur du caractère inférieure ou égale à Me et au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à Me.*

C'est à dire La médiane, Me, d'une série statistique est la valeur du caractère pour laquelle la fréquence cumulée est égale à 0,5 (ou bien l'effectif cumulé croissant est égale à $\frac{N}{2}$).

Recherche pratique de la médiane

1. Cas d'une série statistique discrète

On range les valeurs du caractère une par une dans l'ordre croissant (chaque valeur du caractère doit apparaître un nombre de fois égal à l'effectif correspondant) et nous avons les deux cas suivants.

1. Si l'effectif total N est **impair**, la médiane Me est la valeur du caractère située au milieu c'est à dire si $N = 2m + 1$ alors ici la médiane est $Me = x_{m+1}$.

2. Si l'effectif total N est **pair**, la médiane Me est la demi-somme des deux valeurs situées au milieu c'est à dire si $N = 2m$ alors ici la médiane est $Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$.

Exemple 1.5.2. *1. Soit la série des notes du devoir :*

x_i	7	8	9	10	11	12
n_i	1	3	4	7	3	2

Alors ici $N = 20 = 2 \times 10$ alors la médiane de cette série est $Me = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{10+10}{2} = 10$

on peut toujour rangé les modalités une par une comme suit :

$7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, \underbrace{10, 10}, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12.$ *et on remarque que la médiane se trouve entre les deux modalités $x_{10} = 10$ et $x_{11} = 10$.*

2. Soit la série statistique suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	4	10	6	3	1	1

Alors ici $N = 25 = 2 \times 12 + 1$ alors la médiane de cette série est $Me = x_{12+1} = x_{13} = 1$.

Ici on range les modalités une par une comme suit :

$0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \underbrace{1}, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5$. *et on remarque que la médiane est la modalité du milieu* $x_{13} = 1$.

2. Cas d'une série statistique continue

Si les valeurs prises par le caractère étudié sont groupées en classe, c'est à dire la série statistique est continue, Me vérifie $F_{Me} = 0.5$,où F_{Me} est la fréquence cumulée en Me (ou bien $N_{Me} \uparrow = \frac{N}{2}$. Dans ce cas on détermine d'abord la classe médiane (la classe contenant la médiane), puis on procède à l'intérieur de cette classe à une interpolation linéaire de la façon suivante :

Supposons que la classe médiane est $[a_i, a_{i+1}[$ son effectif est n_i. Alors on Calcule par la règle de trois la position exacte de la médiane comme suit :

$$a_i \to N_{a_i}$$

$$Me \to \frac{N}{2}$$

$$a_{i+1} \to N_{a_{i+1}}$$

On obtient la relation :

$$\frac{Me - a_i}{\frac{N}{2} - N_{a_i}} = \frac{a_{i+1} - a_i}{N_{a_{i+1}} - N_{a_i}}$$

et on obtient enfin :

$$Me = a_i + (a_{i+1} - a_i)\frac{\frac{N}{2} - N_{a_i}}{n_i}$$

De la même manière on peut utiliser les fréquences cumulées à la place des effectifs cumulés dans la règle de trois pour calculer la médiane et on obtient :

$$Me = a_i + (a_{i+1} - a_i)\frac{0,5 - F_{a_i}}{f_i}$$

Pour la démonstration de ces relations on peut voir la figure 9

Exemple 1.5.3. *Soit la série des tailles :*

Classes	$[140, 145[$	$[145, 150[$	$[150, 155[$	$[155, 160[$	$[160, 165[$	$[165, 170[$	$[170, 175[$
n_i	1	1	9	17	16	3	3
$N_{a_{i+1}} \uparrow$	1	2	11	28	44	47	50

Alors on a : $N = 50$ *donc* $\frac{N}{2} = 25$ *et d'après le tableau (la ligne des effectifs cumulés) on peut voir* $N_{155} = 11 < 25 < 28 = N_{160}$ *donc la classe médiane est* $[155, 160[$ *et par l'interpolation linéaire on peut calculer la médiane :*

$$Me = 155 + (160 - 155)\frac{25 - 11}{17} = 155 + 5\frac{14}{17} = 159,11$$

Remarque 1.5.2. *On peut utiliser toujours l'interpolation linéaire pour calculer n'importe quelle valeur du caractère étudié si on connait son effectif cumulé (ou bien sa fréquence cumulée) et réciproquement. Plus exactement, Si on cherche la valeur* x *dont l'effectif cumulé est* $N_x \uparrow$ *on doit d'abord déterminer la classe contenant* x *soit par exemple* $a_i \leq x \leq a_{i+1}$ *ensuite on applique la formule suivante :*

$$x = a_i + (a_{i+1} - a_i)\frac{N_x \uparrow - N_{a_i}}{n_i}$$

Par exemple dans la série des tailles calculer la valeur x *telle que* $N_x \uparrow = 9$*, ensuite calculer* $N_{173} \uparrow$*. Alors on a : d'après le tabeau de la série (la ligne des effectifs cumulés)* $N_{150} = 2 < N_x = 9 < 11 = N_{155}$ *donc* $150 < x < 155$*, Alors :*

$$x = 150 + (155 - 150)\frac{9 - 2}{9} = 150 + 5\frac{7}{9} = 153,88$$

Pour calculer $N_{173} \uparrow$ *on applique la même relation et on a d'après le tableau :* $170 < 173 < 175$ *donc on a :*

$$173 = 170 + (175 - 170)\frac{N_{173} \uparrow - N_{170} \uparrow}{3} = 170 + 5\frac{N_{173} \uparrow - 47}{3}$$

alors :

$$N_{173} \uparrow = 47 + 3\frac{173 - 170}{5} = 48,8 \simeq 49$$

on arrondit le résultat à l'entier le plus proche (car $N_{173} \uparrow$ est un entier).

3. Quartiles q_1, q_3

Les quartiles q_1, q_3 sont aussi des caractéristiques de position, ils séparent les observations en 4 groupes d'effectifs égaux. Et on a la définition suivante :

Définition 10. *1. Le premier quartile q_1 d'une série statistique est la valeur du caractère tel qu'au moins 25% des individus aient une valeur du caractère inférieure ou égale à q_1 et au moins 75% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à q_1. c'est à dire :*

$$N_{q_1} \uparrow = \frac{N}{4} \Leftrightarrow F_{q_1} = 0,25$$

3. Le troisième quartile q_3 d'une série statistique est la valeur du caractère tel qu'au moins 75% des individus aient une valeur du caractère inférieure ou égale à q_3 et au moins 25% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à q_3. c'est à dire :

$$N_{q_3} \uparrow = \frac{3N}{4} \Leftrightarrow F_{q_3} = 0,75$$

La détermination des quartiles est identique à celle de la médiane.

Remarque 1.5.3. *1.Le deuxieme quartile q_2 ne se defini pas puisqu'il s'agit de la mediane Me.*
2. Les trois quartiles partagent l'ensemble des valeurs en quatre sous ensembles de (presque) même effectif.

3. Nous avons toujours : $q_1 \leq Me \leq q_3$

Moyenne $\overline{X}$

Définition 11. *La **Moyenne** (on l'appelle aussi moyenne arithmétique) notée $\overline{X}$ d'une série statistique X est le nombre réel donné par la relation suivante :*

1. Dans le cas d'une série discrète :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Où k est le nombre de modalités du caractère X.

2. Dans le cas d'une série continue

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i$$

Où k ici est le nombre de classe du caractère X et c_i est le centre de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ c'est à dire $c_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ (c'est à dire dans le cas continu le centre de chacune des classes est son représentent dans la formule de la moyenne).

** $\overline{X}$ représente le centre de gravité des valeurs prises par le caractère statistique étudié.*

Exemple 1.5.4. *1. Soit la série des notes du devoir, pour calculer la moyenne de cette série est de préférable d'ajouter au tableau la ligne de $n_i x_i$ alors on a :*

x_i	7	8	9	10	11	12
n_i	1	3	4	7	3	2
$n_i x_i$	7	24	36	70	33	24

donc : $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i = \frac{7+24+36+70+33+24}{20} = \frac{97}{10} = 9,7$

2. Soit la série des tailles, dans ce cas on doit ajouté la ligne des centres des classes (c_i) ensuite la ligne de $(n_i c_i)$ alors on a

Classes	$[140, 145[$	$[145, 150[$	$[150, 155[$	$[155, 160[$	$[160, 165[$	$[165, 170[$	$[170, 175[$
n_i	1	1	9	17	16	3	3
c_i	142, 5	147, 5	152, 5	157, 5	162, 5	167, 5	172, 5
$n_i c_i$	142, 5	147, 5	1372, 5	2677, 5	2600	502, 5	517, 5

donc : $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i c_i = \frac{142,5+147,5+1372,5+2677,5+2600+502,5+517,5}{50} = 159,2.$

Propriétés de la moyenne

Pour toute série statistique sa moyenne possède les propriétés suivantes :

- La somme des écarts à la moyenne est nulle : c'est à dire : $\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{X}\right) = 0.$
- Si la série statistique est constante alors elle égale à sa moyenne c'est à dire si : $X = c$ alors : $\overline{X} = c$.
- Si X est une série statistique et $a \in \mathbb{R}$ alors, $\overline{aX} = a\overline{X}$. Ce qui signifie, que si on multiplie par un même nombre a tous les termes d'une série, la moyenne de la série obtenue est multipliée par a..
- Si X est une série statistique et $b \in \mathbb{R}$ alors, $\overline{X+b} = \overline{X} + b$. Ce qui signifie, que si on ajoute un même nombre b à tous les termes d'une série, la moyenne de la série obtenue est augmentée de b
- Si X est une série statistique et $a, b \in \mathbb{R}$ alors, $\overline{aX+b} = a\overline{X} + b$.
- Si on a deux séries, l'une d'effectif N_1 et de moyenne $\overline{X_1}$, l'autre d'effectif N_2 et de moyenne $\overline{X_2}$. Si : $X = X_1 + X_2$ alors on a : $\overline{X} = \frac{N_1\overline{X_1}+N_2\overline{X_2}}{N_1+N_2}$.

Remarque 1.5.4. *Il existe d'autres moyennes (moyenne géométrique, moyenne harmonique, moyenne quadratique) seulement la moyenne arithmétique est la plus utilisée dans la pratique.*

1.5.2 Paramètres de dispersion

L'idée étant de mesurer la dispersion de la distribution de la série statistique. Il y a trois manières de faire, qui correspondent à des buts différents.

1. Sans référence à un paramètre de position, notion d'"**Etendue**".

2. En référence à une valeur centrale (dispersion autour d'un paramètre de position).

3 En indice relatif (coefficient de variation), dans un but de comparaison.

1. Etendue

Définition 12. *L'étendue d'une série statistique notée* e*, représente la différence entre les valeurs extrêmes de la série : c'est à dire :*

$$e = \max(X) - \min(X)$$

2 Variance et Ecart-type d'une série statistique

Les paramètres de dispersion fondamentaux sont la variance et l'écart-type et on a les définitions suivantes :

Définition 13. *La* ***variance*** *notée* $V(X)$ *ou bien* S_X^2 *d'une série statistique* X *est le nombre réel positif donné par la relation suivante :*

1. Dans le cas d'une série discrète :

$$V(X) = S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

Où k *est le nombre de modalités du caractère* X*.*

2. Dans le cas d'une série continue

$$V(X) = S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(c_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \left(c_i - \overline{X}\right)^2$$

Où k *ici est le nombre de classe du caractère* X *et* c_i *est le centre de la classe* $[a_i, a_{i+1}[$ *c'est à dire* $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$*.*

**En pratique la formule utilisée pour calculer la variance est la suivante :*

$$V(X) = S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2, \text{ dans le cas discret}$$

$$V(X) = S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2, \text{ dans le cas continu}$$

Définition 14. *L'ecart-type notée σ_X d'une série statistique X est la racine carrée positive de la variance c'est à dire :*

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

3. Coefficient de variation

Définition 15. *le coefficient de variation noté CV d'une série statistique X est le nombre réel donné par :*

$$CV = \frac{\sigma_X}{\overline{X}}$$

Propriétés de la variance et l'ecart-type

Pour toute série statistique sa varinace possède les propriétés suivantes :

- La variance est un paramètre qui mesure la dispersion des valeurs du caractère autour de sa moyenne.
- Si la série statistique est constante alors savarianced est nulle c'est à dire si : $X = c \Longleftrightarrow V(X) = 0$.
- Si X est une série statistique et $a \in \mathbb{R}$ alors, $V(aX) = a^2 V(X)$. et $\sigma_{aX} = |a| \sigma_X$..
- Si X est une série statistique et $b \in \mathbb{R}$ alors, $V(X+b) = V(X)$. et $\sigma_{X+b} = \sigma_X$
- Si X est une série statistique et $a, b \in \mathbb{R}$ alors, $V(aX+b) = a^2 V(X)$. et $\sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$.

Chapitre 2

Elements D'analyse Combinatoire

La connaissance des résultats généraux de l'analyse combinatoire est très utile à l'étude du calcul des probabilités. L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini. C'est pourquoi ce premier chapitre est consacré à présenter les principaux résultats d'analyse combinatoire nécessaires au calcul des probabilités classiques : Listes, arrangements, permutations, combinaisons. .

2.1 Définitions et Exemples

2.1.1 Listes

Définition 2.1.1. *On appelle **liste** de p éléments ou $p-$**liste** $(p \geq 1)$ d'un ensemble E, tout élément de l'ensemble $E^p = E \times E \times .... \times E$.*

Remarque 2.1.1. *Une $p-$**liste** est donc un $p-$uple ordonné. Un même élément peut donc y figurer plusieurs fois.*

Exemple 2.1.1. *On jette p dés discernables (par leur couleur par exemple). Le résultat d'un lancer est une $p-$liste de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

Exemple 2.1.2. *On jette p fois de suite une pièce de monnaie. Le résultat d'une telle expérience est une $p-$liste de l'ensemble $\{P, F\}$ ($P = Pile$, $F = Face$).*

Nombre de listes possibles :

Soit E un ensemble fini tel que $card E = n$. Alors comme $card E^p = n^p$on a : Le nombre de $p-$listes distinctes est n^p.

Reprenons les deux exemples précédents

Exemple 1 : Il y a 6^p résultats possibles

Exemple 2 : Il y a 2^p résultats possibles

2.1.2 Arrangements

Définition 2.1.2. *On appelle* ***arrangement*** *de p éléments ou $p-$**arrangement** toute $p-$liste d'éléments distincts deux à deux d'un ensemble E.*

Exemple 2.1.3. *Un pari sur l'arrivée d'un tiercé de n chevaux ($n \geq 3$) est un $3-$arrangement de ces chevaux.*

Nombre D'arrangements

On note A_n^p le nombre de $p-$arrangements d'un ensemble à n éléments.

Il est évident que si $n < p$ alors $A_n^p = 0$.

Sinon, on a n choix possibles pour le premier élément de la liste, $n-1$ pour le deuxième, etc..., d'où :

$A_n^p = n\,(n-1)\,.....(p \text{ termes})$

Soit : $A_n^p = n\,(n-1)\ldots(n-p+1)$

donc :

$$\begin{aligned} A_n^p &= n\,(n-1)\ldots(n-p+1)\,, 1 \leq p \leq n \\ A_n^p &= 0, n < p \end{aligned}$$

Quand $1 \leq p \leq n$, $A_n^p = n\,(n-1)\ldots(n-p+1)\,\frac{(n-p)\ldots2.1}{(n-p)\ldots2.1}$

On a donc aussi :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, 1 \leq p \leq n$$

Rappel : $0! = 1$.

Exemple : Il y a $A_n^p = n(n-1)(n-2)$; $(n \geq 3)$ tiercés possibles dans une course de n chevaux.

2.1.3 Permutations

Définition 2.1.3. *on appelle* ***permutation*** *tout $n-$arrangement d'un ensemble E à n éléments.*

Une permutation est donc une liste ordonnée de tous les éléments de E. D'après ce qui précède, on a :

Le nombre de permutations distinctes possibles est $n!$..

2.1.4 Combinaisons

Définition 2.1.4. *On appelle* ***combinaison*** *de p éléments ou $p-$**combinaison** toute partie à p éléments d'un ensemble E.*

Exemple 2.1.4. *On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (main de poker). Le résultat de cette expérience est une combinaison de 5 éléments parmi 32.*

Exemple 2.1.5. *Un tiercé, dans l'ordre ou non, est une combinaison de 3 chevaux parmi n $(n \geq 3)$.*

Nombre de Combinaisons

On note C_n^p le nombre de $p-$combinaisons d'un ensemble à n éléments (la notation $\binom{n}{p}$ est parfois aussi utilisée).

Il est évident que si $n < p$, alors $C_n^p = 0$.

Sinon, à chaque $p-$combinaison, on fait correspondre $p!$ $p-$arrangements distincts. (Par exemple, à la $3-$combinaison $\{a, b, c\}$, on fait correspondre les $3! = 6$

arrangements : $(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b)$ et (c,b,a)). On aura donc : $p!C_n^p = A_n^p$, soit :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Compte-tenu des expressions de A_n^p , on aura aussi

$$C_n^p = \begin{cases} \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}, & p \leq n \\ 0, & n < p \end{cases}$$

ou :

$$C_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!}, & p \leq n \\ 0, & n < p \end{cases}$$

Exemple : Il y a $C_{32}^5 = \frac{32.31.30.29.28}{5.4.3.2.1} = 201376$ mains de poker distinctes.

Quelques valeurs de C_n^p

$C_n^0 = C_n^n = 1$.
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ pour $n \geq 1$.
$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geq 2$.

Utilisation des nombres C_n^p

1.Propriétés

(a). propriété de symétrie : $C_n^{n-p} = C_n^p$ si $p \leq n$. Cette relation se déduit de la formule : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

On peut dire encore que choisir p éléments parmi n équivaut à choisir les $n-p$ éléments, qui ne figurent pas dans la combinaison, parmi n.

(b) $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$, pour $p \leq n-1$.

Cette relation résulte de l'examen du tableau des C_n^p. Il suffit aussi pour l'établir de remplacer chaque élément qui la compose par sa valeur et de vérifier qu'elle est vraie. Cette relation de récurrence est à la base de la construction du **triangle de Pascal** qui fournit de proche les valeurs de C_n^p :

C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
	C_n^p

Triangle de Pascal

$n\downarrow \backslash p \longrightarrow$	0	1	2	3	...
0	1	0	0	0	...
1	1	1	0	0	...
2	1	2	1	0	...
3	1	3	3	1	...
...	...	...	...	...	...

2.Formule de Newton :

$\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Cette formule est connue sous le nom de formule du **Binôme de newton** ou plus simplement formule de **Newton.**

Compte-tenu de la symétrie des nombres C_n^p, elle peut aussi s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

La formule de Newton se démontre par récurrence sur n. Elle est manifestement vraie pour $n = 0$, supposons que $(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ alors

$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p a^{p+1} b^{n-p} + \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n+1-p}$

$= C_n^n a^{n+1} + \sum\limits_{p=0}^{n-1} C_n^p a^{p+1} b^{n-p} + \sum\limits_{p=1}^{n} C_n^p a^p b^{n+1-p} + C_n^0 b^{n+1}$

$= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + \sum\limits_{p=1}^{n} C_n^{p-1} a^p b^{n+1-p} + \sum\limits_{p=1}^{n} C_n^p a^p b^{n+1-p} + C_{n+1}^0 b^{n+1}$

$= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + \sum\limits_{p=1}^{n} \left(C_n^{p-1} + C_n^p\right) a^p b^{n+1-p} + C_{n+1}^0 b^{n+1}$

$= C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + \sum\limits_{p=1}^{n} C_{n+1}^p a^p b^{n+1-p} + C_{n+1}^0 b^{n+1} = \sum\limits_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p a^p b^{n+1-p}$

Application :

1. Pour $a = b = 1$, on a $2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$, or C_n^p étant le nombre de parties à p éléments de E, $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ représente le nombre de parties de E. On a donc

Si $\text{card}E = n$ alors $\text{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$, ou $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des toutes les parties de E.

Chapitre 3

Notions de base pour le calcul de probabilités

3.1 Introduction

Le calcul des probabilités est une branche de mathématiques dont le but est l'étude des phénomènes aléatoires c'est à dire des expériences dont le résultat ne peut être prédit avec certitude : par exemple, si on répète l'expérience plusieurs fois, on peut obtenir des résultats différents. Une forme d'indétermination apparaît dans l'issue de l'expérience. On peut interpréter cette forme de hasard comme notre incompétence à concevoir, expliciter et utiliser les phénomènes physiques considérés ou encore comme un manque d'information sur les conditions de l'expérience. Certains phénomènes sont peut-être par essence même sujets au hasard.

Les exemples de telles expériences sont nombreux : on peut penser au jeu de pile ou face, au lancer d'un dé, au sexe d'un enfant à naître, au temps d'attente d'un client à la poste, à la durée de vie d'une particule radioactive.

Pour étudier ces phénomènes, on doit tout d'abord en faire un modèle mathématique. Le modèle retenu pour décrire les expériences aléatoires est celui d'un triplet communément noté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

3.2 Axiomes du calcul des probabilités

3.2.1 Notion d'expérience aléatoire

Lorsqu'on étudie un phénomène aléatoire il est possible de l'assimiler à une expérience aléatoire c'est à dire si on répète plusieurs fois de suite la même expérience dans des conditions bien déterminées alors le résultat de cette expérience varie et semble obéir à des considérations stochastiques en un mot au hasard. Dans ce cas on dit qu'on est face à une expérience aléatoire , notée habituellement par la lettre ζ.

Exemples

1.a) **Jeu de dés** :
On jette sur une surface plane deux dés de couleurs différents et dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. A la fin du jet on enregistre les deux chiffres qui apparaissent sur les deux faces supèrieures des dés. Ces deux chiffres représentent le résultat de l'expérience.

1.b) **Jeu de pile ou face** :
On jette sur une surface plane deux pièces de monnaie et on registre ce qu'on voit sur la face supèrieure de chacune des deux pièces. Si on pose **F** pour face et **P** pour pile alors le résultat de l'expérience est exprimé par les deux lettres **F, P.**

1.c) **Tirage sans remise**
On dispose d'une urne contenant N boules dont r sont de couleur rouge et n de couleur noir. L'expérience consiste à retirer de l'urne deux boules successivement et sans remise de la boule retirée. Le résultat de l'expérience est la couleur de la boule obtenue dans le premier choix et celle obtenue dans le second, dans cet ordre.

1.d) **Mesure de la taille** On enregistre la taille d'un individu choisi au hasard dans une population statistique bien déterminée. Le résultat de l'expérience est un nombre réel positif (bien entendu, aprés avoir choisi une unité de mesure).

3.2.2 L'ensemble Fondamental Ω.

On assosie à l'expérience aléatoire ζ un ensemble fondamental noté Ω et dont les éléments représentent tous les résultats possibles de l'expérience ζ.

Exemples.

1.a) $\Omega = \{ (i,j)\,;\, i$ et j sont deux nombres entiers compris entre 1 et $6\}$.
1.b) $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$
1.c) $\Omega = \{(a,b)\,;\, a$ représente la couleur de la boule obtenue dans le 1^{er} tirage et b celle du 2^{eme} tirage$\}$
1.d) $\Omega = \left]0, +\infty\right[$ .On peut choisir un intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$.

Remarque 3.2.1. *Le choix de l'ensemble fondamental Ω se fait selon le cas étudié. Par exemple, dans le jeu de dés on peut supposer que chacun peut se positionner sur chacune de ses arêtes. Dans ce cas on aura des autres issues supplémentaires possibles.*

3.2.3 Notion d'évènements

Considérons une propriété Δ liée à l'issue (résultat de l'expérience aléatoire ζ). A chaque accomplissement de ζ on a deux cas : la propriété Δ est réalisée ou bien elle n'est pas réalisée. Donc, grâce à cette propriété on a partagé l'ensemble fondamental Ω en deux parties disjointes : d'un côté l'ensemble E formé par l'ensemble des points ω, $\omega \in \Omega$, représentant des résultats de ζ avec réalisation de la propriété Δ et de l'autre côté l'ensemble complémentaire $\overline{E}$ dans Ω comportant les points ω de Ω qui correspondent à des résultats de ζ ne réalisant pas la propriété Δ.On dit que l'ensemble E est l'évènement lié à la propriété Δ. On dit aussi que E est l'évènement "E est réalisé". On voit immédiatement que $\overline{E}$ (complémentaire de E dans Ω) est également un évènement auquel on fait référence en écrivant "E est non réalisé".

EXEMPLES.

1.3.a) Dans l'exemple **1.a)** l'évènement E ="la somme des chiffres enregistrés est un chiffre impair" s'écrit comme suit :
$E = \{(i, j) \in \Omega / i + j = impair\} = \{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (1,6), (6,1), (2,3), (3,2), ...\}$.

1.3.b) Dans le jeu de pile ou face (**exemple 1.b)**) l'évènement E ="On obtient face **F** une fois au moins" s'écrit : $E = \{FF, FP, PF\}$.

3.2.4 Types d'évènements

Evènement certain

C'est l'évènement lié à une propriété qui est toujours réalisée lorsqu'on effectue l'expérience ζ . Il est représenté par l'ensemble Ω tout entier.

Evènement impossible

C'est l'évènement lié à une propriété qui n'est jamais réalisée ; il est représenté par la partie vide de Ω, notée ϕ.

Evènement complémentaire

Si E est un évènement alors la partie $\overline{E}$ complémentaire de la partie E dans Ω est aussi un évènement appelé évènement complémentaire de E, on dit également l'évènement "non E".

Evènement élémentaire

Les évènement liés à la même expérience ζ et dont les réalisations n'ont lieu que pour une seule issue de ζ s'appellent les évènements élémentaires ; ceux sont les parties unitaires de Ω.

3.3 Opérations sur les évènements

On prolonge dans la suite le parallélisme entre les notions ensemblistes et probabilistes. Alors en outre de l'opération de complémentarité définie précédemment il existe aussi d'autres opérations importantes sur l'ensemble fondamental Ω lié à la même expérience ζ.

a) Inclusion

Soient A et B deux évènements de Ω. Si l'expérience qui réalise l'évènement A réalise forcément l'évènement B on dit que A implique B et on écrit $A \subset B$.

b) Intersection.

Soient A et B deux sous ensembles représentant deux évènement de Ω. L'évènement "A et B" est exprimé par l'intersection des sous ensembles A et B de Ω appelé évènement intersection de A et B et on écrit : "A et B" $= A \cap B$.

Définition 16. *Si $A \cap B = \phi$ on dit que les évènements A et B sont incompatibles c'est à dire leur réalisation simultanément est impossible.*

c) Réunion.

Si A et B sont deux évènements de Ω alors l'évènement "A ou B" est l'évènements représenté par la réunion des deux sous-ensembles A et B de Ω. On écrit "A ou B" $= A \cup B$.

EXEMPLES

1.4.a) Reprenons l'exemple **1.a)** sur le jeu de dés et considérons les évènements suivants :
$A =$ "les deux chiffres enregistrés sont impairs"
$B =$ "les deux chiffres enregistrés sont pairs"
$C =$ "l'un des chiffres enregistrés est pair et l'autre est impair"

Alors on a :
$\overline{A}$ = "au moins l'un des deux chiffres enregistrés est pair"
$\overline{B}$ = "au moins l'un des deux chiffres est impair"
$A \cap B = \phi$; $A \cup B$ = "les deux chiffres enregistrés sont ou bien pairs ou bien impairs" ; $C = \overline{A \cup B}$ = "l'un des deux chiffres est pair et l'autre est impair", $\overline{A} = B \cup C$, $\overline{B} = A \cup C$, $B \subset \overline{A}$; $A \subset \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = C$.

1.4.b) Dans l'exemple **1.b)** (Jeu de pile ou face avec 2 pièces) l'évènement élémentaire $\{PP\}$ est l'intersection de l'évènement $A = \{PF, PP\}$ avec l'évènement $B = \{PP, FP\}$. L'évènement $A \cup B$ est :"pile au moins une fois " , $\overline{A \cup B}$ = "face deux fois"$= \{FF\}$.

On va appeler donc événements certains sous-ensembles de Ω mais pas toujours tous. En revanche, si A et B sont deux "évènements intéressants", alors nous constatons que $\overline{A}$ et $A \cup B$ le sont aussi. On va donc définir des espaces d'évènements stables par passage au complémentaire ou par réunion dénombrable.

Définition 17. *Supposons Ω un ensemble non vide. On appelle tribu sur Ω (ou σ-algèbre) tout ensemble de parties $\mathcal{F}$ de Ω vérifiant les trois conditions suivantes :*
1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2.$\forall A, A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$ (On dit que $\mathcal{F}$ est stable par complémentaire)
3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ (On dit que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable).

EXEMPLES

Soit Ω un ensemble non vide. $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu appelée tribu grossière ; $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ la collection des parties de Ω, est une tribu ; enfin, si $A \subset \Omega$, $\mathcal{F}_3 = \left\{A, \overline{A}, \emptyset, \Omega\right\}$ est une tribu sur Ω.

Remarque 3.3.1. *Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, alors $\emptyset \in \mathcal{F}$. De plus, $\mathcal{F}$ est stable par union finie, par intersection finie et dénombrable, par différence . . . Expliquons par exemple pourquoi $\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable. Soit donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$*

$\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n\right)}$. Comme, pour tout n, $A_n \in \mathcal{F}$, la condition (2) de la définition implique que $\overline{A}_n \in \mathcal{F}$ pour tout n. La condition (3) entraine donc que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n \in \mathcal{F}$; on peut alors appliquer à nouveau le point (2) pour obtenir que $\overline{\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n\right)} \in \mathcal{F}$.

Définition 18. *Soit Ω l'ensemble fondamental lié à l'expérience aléatoire ζ et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω alors le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle **Espace Probabilisable.** Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés évènements et ceux de Ω évènements élémentaires.*

EXEMPLES

Dans les exsemples 1.a), 1.b) et 1.c) on peut prendre $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on obtient directement l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Remarque 3.3.2. *On aimerait toujours travailler avec la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ Mais ceci n'est pas possible sauf si Ω est un ensemble fini ou dénombrable. Si $\Omega = \mathbb{R}$, il n'est pas possible de mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$ sans aboutir à une contradiction et on se limite à une classe de parties appelée tribu borélienne.*

Définition 19. *On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, notée $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, la plus petite tribu, au sens de l'inclusion, contenant tous les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Cette définition appelle un commentaire : il n'est pas évident à priori que l'on puisse parler de « la plus petite tribu » contenant les intervalles. Toutefois, la définition a bien un sens car l'intersection d'une famille quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω. On peut donc considérer l'intersection de toutes les tribus sur $\mathbb{R}$ contenant les intervalles qui devient par construction « la plus petite tribu».

Définition 20. *On appelle système complet d'évènements toute suite $E_1, E_2, ..., E_n$ d'évènements de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles et telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \Omega$. Les ensembles $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ forment une partition de Ω.*

3.4 Notion de Probabilité

Définition 21. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable et* $\mathbb{P}$ *une application de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$. $\mathbb{P}$ *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *si elle vérifie les conditions suivantes :*
1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *(évènements) deux à deux incompatibles c à d* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *pour* $n \neq m$, *on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

cette propriété s'appelle la $\sigma-$*additivité.*

Définition 22. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable et* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur cet espace. Le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s'appelle un espace probabilisé ou espace de probabilités.*

Remarque 3.4.1. *Pour toute expérience aléatoire décrite par un espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *il existe un grand nombre de probabilités* $\mathbb{P}$ *possibles qu'on peut définir sur cet espace. Mais, dans la pratique le choix de la probabilité* $\mathbb{P}$ *est déterminé soit par des conditions naturelles soit par des considérations expérimentales.*

Exemple 3.4.1. *On lance un dé sur une surface plane et le résultat auquel on s'intéresse est le nombre indiqué par le dé, l'ensemble fondamental sera typiquement* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *On utilise comme tribu, l'ensemble* $\mathcal{P}(\Omega)$ *et, dans le cas d'un dé non pipé, on définit la loi de probabilité* $\mathbb{P}$ *de telle sorte que chaque singleton ait la même probabilité et il est facile de voir que* $\mathbb{P}\{i\} = \frac{1}{6}$ *pour tout* $i \in \Omega$. *Il est aisé de vérifier que cela détermine entièrement* $\mathbb{P}$, *et que l'on a alors, pour tout évènements* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{6}$.

La définition d'une probabilité conduit aux propriétés suivantes :

Proposition 3.4.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Si* A, B *sont deux évènements de* $\mathcal{F}$ *alors,*
1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2. Propriété d'additivité : Si $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(B \diagdown A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4.Croissance : Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \diagdown A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$; en particulier : $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
6.$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Preuve. 1. Pour obtenir $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ il suffit de prende $A_0 = \Omega$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 1$ dans la définition et d'appliquer la $\sigma-$additivité.
2. Ici il suffit aussi de prendre $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$ dans la définition et d'appliquer la $\sigma-$additivité.
3. On écrit $B = (B \diagdown A) \cup (A \cap B)$ et on utilise l'additivité $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \diagdown A) + \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. et 5. Pour ces deux points on applique le point 3. pour $A \subset B$.
6. On peut écrire $A \cup B = A \cup B \diagdown A$ et on utilise l'addivité et le points 3. ■

3.5 Quelques espaces de probabilité importants

3.5.1 L'espace Ω est fini ou dénombrable

Comme on a vu précédemment, dans ce cas, on suppose habituellement que la tribu des évènements $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble de toutes les parties de Ω et donc l'espace probabilisable sera $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.Les probabilités qu'on peut définir sur cet espace sont alors décrites par le résultat suivant

Proposition 3.5.1. *Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Soit $\omega \mapsto p_\omega$ une application de Ω dans $\mathbb{R}_+$ telle que*

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Pour tout $A \subset \Omega$, notons alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Alors $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité (c à d l'application* $\mathbb{P}$ *définie par la dernière formule est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$*). Inversement, toute probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *est du type précédent, avec* $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$*.*

3.5.2 Le cas équiprobable

Considérons le cas particulier de la proposition 2.5.1 ou Ω est fini avec $card\Omega = n$ et et que les évènements élémentaires sont équiprobables (c'est à dire qu'ils ont tous la même probabilité). Dans ce cas il est alors facile de déterminer la probabilité $\mathbb{P}$. En effet comme les $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ sont tous égaux, alors il est facile de voir que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ p_\omega = \frac{1}{card\Omega} = \frac{1}{n}$$

Alors , dans ce cas, si $A \subset \Omega$ on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ total}}$$

Ainsi dans ce cas, les calculs de probabilités se ramène à des problèmes de dénombrement. Cette probabilité $\mathbb{P}$ s'appelle probabilité uniforme sur Ω.

Exemple 3.5.1. *Soit l'expérience aléatoire* $\zeta =$ *"on jette un dé deux fois". Alors* $\Omega = \{(i,j); 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$. *Si le dé est bien équilibré, alors il est tout à fait naturel de dire que les évènements élémentaires sont équiprobables autrement dit* $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ *pour tout* $(i,j) \in \Omega$. *Si* A *est l'évènement "la somme des chiffres enregistrés est égale à* 6*", donc* $P(A) = \sum_{(i,j)\in A} P(\{(i,j)\}) = \frac{5}{36}$, *car ici* $A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$.

Remarque 3.5.1. *Attention : un évènement impossible a la probabilité* 0, *un évènement certain a la probabilité* 1. *La réciproque n'est pas vraie.*
Pour montrer cela de façon plus clair on considère l'expérience $\zeta =$ *"on cherche une pièce de monaie cachée dans une des mains de plusieurs personnes et on s'arrête à sa découverte". Donc* Ω *est constitué de toutes les suites du type* $(EEE...ER)$ *où*

E désigne un échec dans la tentative de découvrir la pièce et R une réussite. Dans l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ on pose : Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $\omega = \underbrace{EE...ER}_{n+1 \text{ éléments}}$: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = q^n p$, $n \in \mathbb{N}$ avec $q = \mathbb{P}(E)$ et $p = \mathbb{P}(R)$; $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$ est la probabilité de trouver la pièce dans chaque tentative). Il est facile de voir que : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n p = p\frac{1}{1-q} = 1$. Si A représente l'évènement "on découvre la pièce au troisième essai au moins" alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=2}^{+\infty} q^n p = q^2$. On remarque que l'évènement $(EE...E....E......)$ a une probabilité nulle par rapport à la probabilité définie pourtant, la <u>possibilité</u> que cet évènement ait lieu <u>existe</u> puisqu'il fait partie de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ (mais cet évènement est irréalisable expérimentalement).

Terminologie concernant les évènements

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, l'évènement A est dit négligeable.
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, l'évènement A est dit presque sûr.

3.5.3 Cas où $\Omega = \mathbb{R}$

Ce cas est naturellement le plus important de tous. La tribu mise sur $\mathbb{R}$ est la tribu de Borel $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ définie à la section **2.3** comme la plus petite tribu contenant les intervalles (ouverts, fermés, semi ouverts, demi droites).

Pour décrire les probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$, introduisons une définition importante :

Définition 23. *Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: On dit que F est une fonction de répartition si elle satisfait aux trois propriétés suivantes :*

- *F est croissante (au sens large) ;*
- *$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;*
- *F est continue à droite en tout point x, c'est-à-dire $\lim_{h \searrow 0} F(x+h) = F(x)$:*

On a alors le théorème fondamental suivant :

Théorème 1. *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$. Soit $F_{\mathbb{P}}$ la fonction réelle définie par :*

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{P}} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ F_{\mathbb{P}}(x) &= \mathbb{P}(]-\infty, x]) \end{aligned}$$

Alors $F_{\mathbb{P}}$ est une fonction de répartition. Inversement, si F est une fonction de répartition, alors il existe une et une seule probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ telle que $F_{\mathbb{P}} = F$.

Commentaires : Ce résultat est assez rassurant : bien qu'on connaisse mal la tribu $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, et donc les probabilités définies dessus, il y a en fait bijection entre l'ensemble de toutes les probabilités sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble moins abstrait de toutes les fonctions de répartition. Donc pour définir une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ il nous suffit seulement de définir sa fonction de répartition.

La fonction de répartition permet de calculer les probabilités de tous les intervalles. Pour simplifier, adoptons la notation pour la limite à gauche en x de la fonction croissante F :

$$F(x-0) = \lim_{h \nearrow 0} F(x-h)$$

Proposition 3.5.2. *Soit F une fonction de répartition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$. Alors :*

*.$\mathbb{P}(]-\infty, x[) = F(x-0)$, $\mathbb{P}(]x, +\infty[) = 1 - F(x)$,
$\mathbb{P}([x, +\infty[) = 1 - F(x-0)$,
Et pour $a \leq b$,
* $\mathbb{P}(]a, b]) = F(b) - F(a)$, $\mathbb{P}([a, b[) = F(b-0) - F(a-0)$.
*. $\mathbb{P}(]a, b[) = F(b-0) - F(a)$, $\mathbb{P}([a, b]) = F(b) - F(a-0)$
En particulier : $\mathbb{P}(\{a\}) = F(a) - F(a-0)$.

Donnons maitenant des exemples de fonctions de répartition

Définition 24. ***Fonctions de répartition à densité :*** *Soit f une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$ $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ qui ait des discontinuités au plus en un nombre fini* *de points* $a_1 < a_2 < ... < a_N$ *et qui soit telle que les intégrales* $\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$ *convergent et satisfassent :*

$$\sum_{i=0}^{N} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx = 1$$

avec la convention $a_0 = -\infty, a_{N+1} = +\infty$ *(c à d* $\sum\limits_{i=0}^{N} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$*).*

On définit alors la fonction F *par* $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$*. Il est clair que* F *est une fonction de répartition. Ici, elle est de plus continue et, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, elle satifait* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \notin \{a_1, a_2, ..., a_N\}$*. La fonction* f *s'appelle alors la densité de la fonction de répartition* F*.*

Exemple 3.5.2. *Soient* f_1 *et* f_2 *les fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

on peut montrer facilement que f_1 *et* f_2 *sont des fonctions de densité (pour les points de discontinuités* $N = 0$ *pour* f_1 *et* $N = 2$ *pour* f_2*). Les fonctions de répartition correspondantes sont respectivement :* $F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$,

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Définition 25. ***La probabilité*** δ_a ***de Dirac :*** *Si* a *est un réel, il s'agit de la probabilité définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\delta_a(A) = \begin{cases} 0, & a \notin A \\ 1, & a \in A \end{cases}$*. En appliquant ceci à* $A =]-\infty, x]$*, on obtient la fonction de répartition :* $F_{\delta_a}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$*.*
Si $a = 0$*, cette fonction s'appelle l'**échelon de Heaviside**. Les travaux de 1894 de cet ingénieur électricien sont à la source de la théorie moderne des distributions. Cette théorie permet par exemple de donner un sens à la dérivation de la fonction ci dessus : c'est la probabilité de Dirac* δ_a *qui jouerait alors le rôle de la dérivée.*

3.6 Probabilités Conditionelles et Indépendance

3.6.1 Probabilités Conditionelles

La notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte l'information dont on dispose pour actualiser la probabilité que l'on donne à un évènement. Autrement dit, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soient deux événements A et B ayant chacun une probabilité non nulle d'être réalisé. On s'intéresse à la nouvelle probabilité de l'un d'eux si l'on est assuré que l'autre s'est produit.

Exemple 3.6.1. *Soit l'expérience aléatoire $\zeta =$ "on jette un dé non pipé une seule fois". Alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme. On pose A : "la face est paire"$= \{2, 4, 6\}$ et B : "La face est inférieure ou égale à 3" $= \{1, 2, 3\}$. On sait bien que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Mais si l'on est assuré de la réalisation de A (i.e. que la face est paire), la probabilité de B semble tomber à $\frac{1}{3}$.*

Maintenant, nous définissons formellement ce concept pour le rendre facilement exploitable dans la conduite des calculs de façon sûre et éfficace.

Définition 26. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et B un événement de probabilité non nulle, et soit A un événement . On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, et on note $\mathbb{P}(A/B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ le nombre*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple 3.6.2. *M. et Mme H ont deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? Même question s'il l'on suppose que la fille est l'aînée ? Pour résoudre ce problème rigoureusement, il faut se construire un espace de probabilité adapté. On suppose qu'un nouveau né est un garçon ou une fille avec la même probabilité et indépendamment du sexe de ses aîné(e)s. De là, une famille de deux enfants est dans l'une des quatre configurations de $\Omega = \{FG, GF, FF, GG\}$, chacune avec une probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose dans le premier cas que l'événement $A_1 = \{FG, GF, FF\}$ est réalisé et on cherche la probabilité qu'il y ait un garçon* *(et une fille) dans la famille soit la probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}(B_1/A_1)$ *avec* $B_1 = \{FG, GF\}$*. On obtient :*

$$\mathbb{P}(B_1/A_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(\{FG, GF\})}{\mathbb{P}\{FG, GF, FF\}}\frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

Par contre, dans le deuxième cas , on cherche $\mathbb{P}(B_2/A_2)$ *où* $A_2 = \{FG, FF\}$ *et* $B_2 = \{FG\}$*. On obtient* $\mathbb{P}(B_2/A_2) = \frac{1}{2}$*.*

Proposition 3.6.1. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* B *un événement de probabilité non nulle. Alors l'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(./B) \ &: \ \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ &: \ A \longmapsto \mathbb{P}(A/B) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $\mathcal{F}$*.*

Preuve. 1. On a $\mathbb{P}(\Omega/B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles c à d $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n/B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}$$

les événements $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ sont eux-mêmes deux à deux incompatibles et par suite

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n/B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n/B)$$

Donc $\mathbb{P}(./B)$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$. ■

Proposition 3.6.2. ***(Formule des probabilités composées)***

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A)\,\mathbb{P}(A)$$

Généralisation : soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n événements de probabilités strictement positives. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2/A_1)\,\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2)\,...\mathbb{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Preuve. facile. ■

Proposition 3.6.3. ***(Formule des probabilités totales).***

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) > 0$. Alors

$$\forall A \in \mathcal{F} : \ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A/\overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$$

Généralisation : soient $B_1, B_2, ..., B_n$ un système complet d'événements pour Ω tel que $\mathbb{P}(B_j) > 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$. Alors :

$$\forall A \in \mathcal{F} : \ \mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_j)\,\mathbb{P}(B_j)$$

Preuve. On a $\forall A \in \mathcal{F} : A = A \cap \Omega$ et d'autre part $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A \cap B_j)\right)$$

les évènements $(A \cap B_j)_{j=\overline{1,n}}$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_j)\,\mathbb{P}(B_j)$$

■

Proposition 3.6.4. *(**Formule de Bayes**). soient $(B_1, B_2, ..., B_n)$ un système complet d'événements pour Ω et A un évènement de Ω de probabilité strictement positive. Alors :*

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : \ \mathbb{P}(B_i/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B_i)\,\mathbb{P}(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_j)\,\mathbb{P}(B_j)}$$

Preuve. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : \mathbb{P}(B_i/A) = \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_j)\mathbb{P}(B_j)}$ ■

Exemple 3.6.3. *Pour dépister une maladie, on applique un test sanguin. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé et cela se produit dans 2% des cas. La proportion de personnes malades dans la population soumise au test est de 10^{-3}. Calculer la probabilité pour qu'un patient soit en bonne santé sachant que le résultat de son test est positif. Pour résoudre ce problème on considère les évènements suivants :*

M : " Le patient est atteint par la maladie",

T : " Le résultat du test est positif"

Alors on a : $\mathbb{P}(M) = 0,001$, $\mathbb{P}(T/M) = 0,99$ et $\mathbb{P}\left(T/\overline{M}\right) = 0,02$ et on veut calculer $\mathbb{P}\left(\overline{M}/T\right)$?

*Calculons d'abord $\mathbb{P}(T)$: on a $\left\{M, \overline{M}\right\}$ est un système complet d'évènements pour Ω alors d'après la **formule des probabilités totales :***

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(T/M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T/\overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right) \\ &= 0,99 \times 0,001 + 0,02 \times (1 - 0,99) = 0,00119\end{aligned}$$

*D'après la **Formule de Bayes***

$$\mathbb{P}\left(\overline{M}/T\right) = \frac{\mathbb{P}\left(T/\overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)}{\mathbb{P}(T/M)\,\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T/\overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} = \frac{0,02 \times 0,01}{0,00119} = 0,168$$

3.6.2 Indépendance stochastique des évènements

Indépendance de deux évènements :

Idée : Si A et B sont deux évènements alors on dit qu'ils sont indépendants si la connaissance de la réalisation de l'un ne change en rien la probabilité de la réalisation de l'autre, soit «$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou bien $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$». Pour pouvoir définir cette notion y compris pour les événements de probabilité nulle, on a la définition suivante :

Définition 27. *Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$

On obtient souvent des événements indépendants lorsqu'on reproduit une expérience sans que la première expérience n'interfère avec la seconde. C'est par exemple le cas lorsque l'on joue deux fois à pile ou face. Voici un autre exemple.

Exemple 3.6.4. *Si on lance deux fois un dé équilibré, alors $\Omega = E \times E$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Comme le dé est équilibré alors tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. Définissons les évènements suivants : $A = \{(i, j), i \text{ pair}\}, B = \{(i, j), j \text{ pair}\}, C = \{(i, j), i + j \text{ pair}\}$. Il est clair que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, et $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A \cap C) = P(C \cap A) = P(B \cap C) = P(C \cap B) = \frac{1}{4}$. Par conséquent les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants.*

Remarque 3.6.1. ***(Attention) :*** *Il ne faut pas confondre incompatibilité avec indépendance de deux évènements. Si A et B sont deux évènements incompatibles alors ils ne sont indépendants que si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$. Lorsque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ ils sont toujours dépendants.*

Proposition 3.6.5. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, A et B deux événements de $\mathcal{F}$, alors on a :*

A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

Preuve. On démontre seulement : A et B indépendants$\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants (de la même manière pour les autres). On a $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$ (car $(A \cap B)$ et $\left(\overline{A} \cap B\right)$ sont incompatibles), alors on a : A et B indépendants$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \Longleftrightarrow \overline{A}$ et B indépendants. ■

Evènements indépendants dans leur ensemble

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit une famille finie ou infinie $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de $\mathcal{F}$. Dire que ces évènements sont indépendants deux à deux équivaut à écrire : $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ pour tout $i, j \in I$. Mais , il y a aussi l'éventualité où $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants (on dit aussi indépendants dans leur ensemble) celle-ci et donnée par la définition suivante :

Définition 28. *On dit que les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants dans leur ensemble si pour tout sous-ensemble $J \subseteq I$, on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Cette condition est plus stricte que l'indépendance des événements deux à deux, l'indépendance deux à deux correspond à la restriction de cette condition aux sous-ensembles J de cardinal 2. Le piège est le suivant : si A, B, C sont trois événements indépendants alors (A, B), (A, C) et (B, C) sont des couples d'événements indépendants mais la réciproque est fausse. C'est à dire l'indépendance mutuelle de plusieurs évènements **implique** leur indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.6.5. *Considérons l 'expérience aléatoire $\zeta =$ "On jette deux fois un dé sur une surface plane" et les évènements suivants : $A_1 =$ "on a obtenu le chiffre 1 dans le premier jet", $A_2 =$ "on a obtenu le chiffre 1 dans le deuxième jet" et $A_3 =$ "on a obtenu le même chiffre dans les deux jets". Il est clair que les évènements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants deux à deux. En outre $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{6}$ et*

$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 =$"*on a obtenu le chiffre 1 dans les deux jets*". *Donc* $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$ *qui est différent de* $P(A_1).P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{216}$ *et par conséquent les évènements* A_1, A_2 *et* A_3 *sont indépendants deux à deux mais ils ne sont pas indépendants dans leur ensemble.*

Proposition 3.6.6. —*Si* $(A_j)_{j\in I}$ *est une famille d'évènements indépendants et* J *une partie finie de* I *alors pour tout* $i \notin J$ *on a :* $\mathbb{P}\left(A_i / \bigcap\limits_{j\in J} A_j\right) = \mathbb{P}(A_i)$. *Autrement dit l'information sur la réalisation des évènements* $(A_j)_{j\in J}$ *n'a aucune influence sur la probabilité de réalisation de l'évènement* A_i *pour* $i \notin I$. *Cette égalité constitue un deuxième critère d'indépendance et donne la signification de celle-ci.*

–*Dans la suite* $(A_j)_{j\in J}$, $J \subset I$ *et J finie, d'évènements indépendants on peut remplacer certains évènements* A_j *par leur complémentaire* $\overline{A}_j$ *sans perdre la propriété d'indépendance.*

Preuve. La démonstration se déduit sans difficulté de la définition d'indépendance des évènements. ■

3.7 TD N°1 Exercices de Statistique

Exercice 3.7.1. *Dans une petite localité, on a relevé le nombre de pièces par appartement et on a trouvé :*

nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7
nombre d'appartements	48	72	96	64	39	25	3

1. *Préciser la population et le caractère étudies .*
2. *calculer les paramètres de cette série (médiane, quartiles, moyenne et variance).*
3. *Représenter les diagrammes en bâtons et en boite à moustache et courbes cumulatives*

Exercice 3.7.2. *Une loterie a été organisée avec des gains en argent liquide. Tous les billets n'ont pas été vendus. Le tableau ci-dessous résume les gains effectivement* *perçus par les joueurs :*

Gains en DA	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
nombre de gagnants	2	1	1	3	2	2	3	5	0	1

I) : ***Analyse de la série statistique***

1.Préciser la population et le caractère étudies. Combien y a-t-il de gagnants à cette loterie ? (chaque personne a gagné au plus une fois)

2. Quel a été le gain moyen parmi les gagnants

3. a) Quelle est la médiane de cette série statistique ? Quels sont les quartiles

b) Déterminer l'écart interquartile

4. Faire un diagramme en boîte à moustaches de la série

5. Calculer l'écart type de la série

II) : Changement au niveau des gains : *L'association qui organise la loterie envisage des changements au niveau des gains*

6. La première hypothèse envisagée consiste à augmenter tous les gains de 217 Dinars. Dans ce cas, comment varient : a) La moyenne ? b) L'écart type ? c) La médiane

7. La deuxième hypothèse envisagée consiste à multiplier tous les gains par 2 .Dans ce cas, comment varient : a) La moyenne ? b) L'écart type ? c) La médiane

Exercice 3.7.3. *Les tailles d'un échantillon d'individus sont réparties dans tableau suivant :*

Classes	$[155, 160[$	$[160, 165[$	$[165, 170[$	$[170, 175[$	$[175, 180[$	$[180, 195[$
Effectifs	3	7	9	16	11	4

1.*Déterminer la population et le caractère étudier.*

2. *Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences , les effectifs cumulés croissants et décroissants et les pourcentage ?*

3..*Tracer l'histogramme et la courbe cumulative des fréquences et fréquences cumulées de cette distribution. .*

4..*Calculer le mode la médiane, les quartiles , la moyenne et la variance.de cette série ?*

5. *On décide de regrouper les classes n°1 et 2 ,celles n°3 et 4 et les deux dernières . Calculer comme au 4. les paramètres de la nouvelle distribution.*

Exercice 3.7.4. *La répartition de l'age d'un groupes de personnes est donnée dans le tableau suivant :*

Age	< 9	< 11	<13	< 15	< 17	< 21
nombre	0	12	25	33	37	40

3.8 TD N°2 Eléments d'analyse combinatoire

Exercice 3.8.1. *En utilisant la fonction* $x \longmapsto (1+x)^n$ *calculer :* $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$

Exercice 3.8.2. (a) *Combien de nombres de* 3 *chiffres différents peut-on écrire avec les chiffres suivants :* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *et* 8. (b) *Combien de nombres pairs ?* (c) *Combien de nombres impairs ?* (d) *Combien de nombres pairs qui commencent par le chiffre* 1.

Exercice 3.8.3. *Un mot de passe est composé de* 3 *lettres latines différentes suivies de* 2 *chiffres différents*

(a) *Combien de mots de passe peut-on écrire de cette manière ?* (b) *Parmi ces mots combien qui se terminent par un chiffre pair ?* (c) *Parmi tous les mots de passe, combien qui commencent par une voyelle et se terminent par un chiffre pair ?*

Exercice 3.8.4. *Nous disposons de* 20 *boites de conserve dont* 8 *sont avariées.*

(a) *Combien avons nous de possibilités de choisir* 10 *boites par* 20. (b) *Combien avons nous de choix où les* 10 *boites sont saines ?* (c) *Combien avons nous de choix où* 9 *boites sont saines et une est avariée ?* (d) *Combien y a-t-il de possibilités où une au moins des* 10 *boites est avariée ?*

Exercice 3.8.5. *Nous possédons* 10 *jetons numérotées de* 1 *à* 10.

(*a*) *de combien de façons peut-on ordonner ces* 10 *jetons ?* (*b*) *de combien de façons peut-on ordonner ces 10 jetons de sorte que les 5 premières positions soient occupées par les jetons porteurs d'un numéro impair ?*

Exercice 3.8.6. (*a*) *De combien de façons peut-on ranger les 12 tomes d'une encyclopédie de sorte que les tomes 1 et 2 soient côte à côte dans cet ordre ?* (*b*) *De combien de façons peut-on ranger les 12 tomes de sorte que le tome 1 soit dans la première position, le tome 2 dans la cinquième position et le tome 12 dans la 12ème position.*

3.9 TD N°3 Notions de base pour le calcul des probabilités

Exercice 3.9.1. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ *une suite d'évènements de* $\mathcal{F}$. *Trouver l'expression ensembliste des évènements suivants et donner l'évènement complémentaire chaque fois*

(*a*) A_1 *seul se réalise,* (*b*) A_1 *et* A_2 *se réalisent seulement,* (*c*) *un évènement au moins se réalise,* (*d*) *un évènement au plus se réalise,* (*e*) *au moins six évènements se réalisent,* (*f*) *tous les évènements se réalisent,* (*g*) *aucun évènement ne se réalise,* (*h*) *au plus deux évènements se réalisent.*

Exercice 3.9.2. *1.Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur* Ω *est une tribu sur* Ω.
2. La réunion des tribus est-il une tibu ? 3.L'ensemble des parties finies de Ω *est-il une tribu ?*

Exercice 3.9.3. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A_1, A_2, ..., A_n$ n *évènements de* $\mathcal{F}$. *Montrer que :*

$$(1) . \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \qquad (2) . \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)$$

Exercice 3.9.4. *Soient* Ω *un ensemble non vide et* ω *un point de* Ω. *Pour* $A \subset \Omega$, *on pose* $\delta_\omega(A) = 1$ *si* $\omega \in A$ *et* 0 *sinon. Montrer que* δ_ω *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *(*δ_ω *appelé masse de Dirac au point* ω*).*

Exercice 3.9.5. *On considère une classe de* n *élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.*

(1)*. Quelle est la probabilité,* p_n*, pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire. Calculer* p_{366}.

(2)*. Quelle est la probabilité,* q_n*, pour qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire que Ali ?*

Exercice 3.9.6. *On jette trois dés non pipés. Calculer :*

(a)*. La probabilité d'obtenir au moins un as ;* (b)*. La probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre ;* (c) *La probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire ;* (d)*. La probabilité que la somme des points soit paire et que deux faces portent le même numéro.*

Exercice 3.9.7. *On cherche un parapluie qui, avec la probabilité* $\frac{p}{7}$*, se trouve dans l'un quelconque des* 7 *étages d'un immeuble. On a cherché dans les* 6 *premiers étages mais on ne l'a pas trouvé. Quelle est la proababilté que le parapluie se trouve au* 7^{eme} *étage ?.*

Exercice 3.9.8. *On considère trois urnes numérotées de* 1 *à* 3*. L'urne n° 1 contient* 1 *boule blanche et* 2 *noires, l'urne n° 2 contient* 2 *boules blanches et* 1 *noire et L'urne n° 3 contient* 3 *boules blanches. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne.1. Quelle est la probabilité pour que cette boule soit blanche ? 2. Sachant que la boule tirée est blanche calculer la probabilité qu'elle est tirée de l'urne n° 1 ?.*

Exercice 3.9.9. *Trois machines* A, B *et* C *produisent respectivement* $50\%, 30\%$ *et* 20% *du nombre total de pièces fabriquées par une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses pour chaque machine est respectivement* 3%,4% *et* 5%.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ? 2. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit bonne ? 3. Si on prend une pièce qui s'avère être défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par A, B, C *?*