Bon ordre et preuve par récurrence

3.1 Preuve par récurrence

3.1.1 Preuve par récurrence simple

Théorème 3.1 *Soit* $\mathcal{P}(n)$ *un prédicat dépendant d'un élément* n *de* $\mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.* ***(Initialisation)***

On suppose également que pour tout entier n *l'implication* $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.* ***(Hérédité)***

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* n.

Preuve. On raisonne par l'absurde.

Soit $E = \{n \in N, \mathcal{P}(n) \text{ est faux}\}$.

En tant que partie non vide de $\mathbb{N}$, l'ensemble E a un plus petit élément n_0.

n_0 est différent de 0 car on a supposé $P(0)$ vraie comme $0 < n_0$ on sait que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.

$P(n_0 - 1)$ est vraie car $n_0 - 1 \notin E$.

Par hypothèse $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ d'où $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Cette méthode de démonstration utilise le principe dit :**"principe du bon ordre".** ∎

Exemple 3.1 *Soit la suite définie par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}, \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On va montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par 1.*
Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = \dfrac{1}{2} \leq 1.$
On suppose ensuite que la proposition est vraie pour n *et on la démontre pour* $n+1$.
On remarquera que les termes de la suite sont positifs.

$$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1 \Rightarrow u_n^2 + 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1+u_n^2}{2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

3.1.2 Schéma de preuve par le principe du bon ordre

1. Définir l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ est faux}\}$
2. Supposer que E est non vide comme base pour une preuve par contradiction.
3. Comme $\mathbb{N}$ est bien ordonné , il y a un plus petit élément n_0 dans E.
4. Le plus petit élément ne peut pas être celui de la proposition de départ. Utiliser l'hérédité pour arriver à la contradiction.

Exemple 3.2 *Soit la suite définie par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}, \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On va montrer par le principe du bon ordre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par 1.*
On raisonne par l'absurde.
Soit $E = \{n \in \mathbb{N},\ u_n > 1\}$
En tant que partie non vide de $\mathbb{N}$ *l'ensemble* E *a un plus petit élément* n_0.

On a n_0 différent de 0 car on a $u_0 = \dfrac{1}{2} \leq 1$.

Comme $0 < n_0$ *on sait que* $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ *et* $n_0 - 1 \notin E$.

$$0 \leq u_{n_0-1} \leq 1 \Rightarrow u_{n_0-1}^2 \leq 1 \Rightarrow u_{n_0-1}^2 + 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1+u_{n_0-1}^2}{2} \leq \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow u_{n_0} \leq 1 \Rightarrow u_{n_0} \notin E.$$

Ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Exemple 3.3 ***Importance de l'initialisation***

Est ce que $3^{2n+4} - 2^n$ *est un multiple de 7 ?*

Supposons que $3^{2n+4} - 2^n$ *est un multiple de 7.*

On va montrer que $3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1}$ *est un multiple de 7.*

On a

$$\begin{aligned} 3^{2n+6} - 2^{n+1} &= 9 \times 3^{2n+4} - 2 \times 2^n = (7+2) \times 3^{2n+4} - 2 \times 2^n \\ &= 7 \times 3^{2n+4} + 2 \times 3^{2n+4} - 2 \times 2^n \end{aligned}$$

On a par conséquent la somme de deux multiples de 7 qui est donc un multiple de 7.

Ici l'initialiation est impossible pour $n = 0$ *on a* $3^4 - 2^0 = 80$ *qui n'est pas divisible par 7.*

On peut démontrer en utilisant le calcul par congruences que $3^{2n+4} - 2^n$ *n'est pas un multiple de 7.*

En effet on a :

$$3^2 \equiv 2\,[7] \Rightarrow 3^{2n} \equiv 2^n\,[7] \ \text{ de plus on a } 3^4 \equiv 4\,[7] \ \text{ d'où } 3^{2n+4} \equiv 4.2^n\,[7]$$
$$\text{On a également } 2^n \equiv 2^n\,[7] \ \text{ d'où } 3^{2n+4} - 2^n \equiv 3.2^n\,[7]$$

Comme 7 ne divise pas 3 ni 2 alors 7 ne divise pas $3^{2n+4} - 2^n$.

Remarque 3.1 *Pour montrer qu'une proposition* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* $n \geq n_0$, *on remplace l'hypothèse d'initialisation par* $\mathcal{P}(n_0)$ *est vraie.*

Exemple 3.4 *Preuve par récurrence simple (avec un pas supérieur à 1)*

La suite de Fibonnaci[1] *est donnée par*

$$\begin{cases} F_0 = 0. \\ F_1 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Soient $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *(φ est appelé le nombre d'or). On a φ et φ' sont solution de l'équation* $x^2 - x - 1 = 0$.

Question : Montrer que pour tout $n \geq 1$ nous avons $F_n \leq \varphi^{n-1}$.

Réponse :Pour $n = 1$ on a $F_1 = 1 \leq 1 = \varphi^0$.

Pour $n = 2$ on a $F_2 = F_1 + F_0 = 1 \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi^1$.

On doit ensuite démontrer que :

$$\forall n \geq 1 : P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$$

On a par définition

$$\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^n + \varphi^{n-1} \text{ (Par hypothèses de récurrence)}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^{n-1}(\varphi + 1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^{n-1}\left(\varphi^2\right) \text{ (Car } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0\text{)}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^{n+1}$.

3.1.3 Preuve par récurrence généralisée

Théorème 3.2 *Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$.*

On suppose que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. ***(Initialisation)***

On suppose également que pour tout entier n que l'implication $(\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge .... \wedge \mathcal{P}(n)) \Rightarrow$

[1] *Leonardo Fibonacci (1175-1250 Pise, Italie) est un mathématicien italien qui a fait ses études à Béjaia.*

$\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.* ***(Hérédité)***

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* n.

Preuve. Soit la proposition $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge .... \wedge \mathcal{P}(n) = Q(n)$.

On va montrer que $Q(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$ si et seulement si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

Ici il s'agit de montrer une équivalence, on doit donc montrer deux implications.

Implication n°1

On va montrer que si $Q(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

On a $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge .... \wedge \mathcal{P}(n)$ Vrai, par conséquent $\mathcal{P}(0)$ Vrai et $\mathcal{P}(1)$ Vrai ...et $\mathcal{P}(n)$ Vrai donc $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

Implication n°2

On va montrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour toute valeur de $\mathbb{N}$, alors $Q(n)$ est vrai pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

Comme $P(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$ par conséquent $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge .... \wedge \mathcal{P}(n)$ est également vrai et donc $Q(n)$ est vrai pour toute valeur de $\mathbb{N}$. ■

Exemple 3.5 *Démontrer que tout entier n entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.*

Démonstration :

Notons P(n) la propriété : tout entier k *de* $\{2; 3; 4.....; n-1; n\}$ *peut se décomposer en produit de facteurs premiers.*

i) On a P(2) est vraie car 2 = 2.

ii) Supposons que $P(k)$ *est vraie pour tout entier naturel* $2 \leq k \leq n$. *Il faut prouver que* $P(n+1)$ *est vraie.*

- Si n + 1 est premier on peut écrire n + 1 = n + 1.

- Si n + 1 n'est pas premier il admet donc un diviseur premier p et on a : n +1= q.p

On a nécessairement $q \leq n$ *et donc selon (ii) q se décompose en produit de facteurs* *premiers.*

Par conséquent, P(n + 1) est vraie.

3.1.4 Preuve par récurrence forte

Théorème 3.3 *Soit $\mathcal{P}$ une proposition dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$.*

Si pour tout n on a : $\forall k < n : \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Preuve. On effectue la preuve par récurrence généralisée sur n.

On a pour $n = 0$.

$\forall k < 0 : \mathcal{P}(k)$ Cette proposition est vraie car k appartient à l'ensemble vide.

On suppose que la proposition $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge .... \wedge \mathcal{P}(n)$ est vraie et on démontre que $\mathcal{P}(n+1)$.

Comme $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge .... \wedge \mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\forall k < n+1 : \mathcal{P}(k)$ est vraie.

D'où on obtient $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. ■

3.1.5 Cas particulier de preuve par récurrence (récurrence de Cauchy)

Proposition 3.1 *Soit $P(n)$ un prédicat qui vérifie :*

$$\begin{cases} (i) : P(1) \text{ est vraie.} \\ (ii) : \forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(2n) \\ (iii) : \forall n \in \mathbb{N} : P(n+1) \Rightarrow P(n) \end{cases}$$

Alors $P(n)$ est vraie pour toute valeur de n.

3.1.6 Preuve de l'inégalité de Cauchy Scwhartz par récurrence.

Théorème 3.4 *Moyenne harmonique, géométrique et arithmétique.*
Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres réels positifs, alors :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} \leq \frac{a_1+a_2...+a_n}{n}$$

L'égalité ayant lieu si et seulement si tous les a_i sont égaux.

Preuve. Pour $n = 2$, il faut établir que $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$ c'est à dire $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ ce qui est vrai.

On va montrer $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ Posons $A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$ alors :

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) A \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n$$

Donc $\prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}\right)^{n-1}$.

On démontre à présent que $P(n) \Rightarrow P(2n)$

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right) \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)^n$$

$$\overset{P(2)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n}$$

L'inégalité de gauche se déduit de la précédente en considérant $\frac{1}{a_1}, ..., \frac{1}{a_n}$ ■

3.2 Ordre bien fondé

3.2.1 Ordre et ordre strict

Définition 3.1 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.*

- On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive quand : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x.$

- On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique quand : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x.$

- On dit que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique quand : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y.$

- On dit que $\mathcal{R}$ est transitive quand : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

Définition 3.2 *Une relation binaire est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 3.6 *L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuel* $(\leq)$.

Exemple 3.7 *Sur l'ensemble des parties d'un ensemble, la relation $\subset$ est une relation d'ordre.*

Définition 3.3 *Une relation binaire est une relation d'ordre strict si elle est transitive et anti réflexive.*

$$\mathcal{R} \text{ anti réflexive : } \forall x \in E : x \not\mathcal{R} x$$

Exemple 3.8 *L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation* $<$.

Proposition 3.2 *Une relation d'ordre strict est antisymétrique.*

Preuve. $\mathcal{R}$ est par définition transitive et anti réflexive.
Une relation est antisymétrique si elle vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

On va montrer que dans une relation d'ordre strict la proposition $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ est toujours fausse.

On raisonne par l'absurde.

On suppose qu'il existe $(x, y) \in E^2$ tel que la proposition $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ est vraie. Alors par transitivité on obtient $x\mathcal{R}x$ vraie ce qui contredit le fait que $\mathcal{R}$ est anti réflexive.

Par conséquent, la proposition $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ est toujours fausse et donc l'implication logique $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ est toujours vraie. ■

Définition 3.4 *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensembe ordonné. Deux éléments x et y sont dits comparables si on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire on dit que x et y sont incomparables.*

Exemple 3.9 *Soit l'ensemble $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ -l'ensemble des parties de $\{a, b, c\} -$ muni de la relation d'ordre $\subset$.*

Les éléments $\{a, b\}, \{b, c\}$ sont incomparables.

Définition 3.5 *Un ordre $\mathcal{R}$ sur E est dit total si deux éléments sont toujours comparables*

$$\forall (x, y) \in E,\ x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.

Définition 3.6 *Un ordre strict est dit strict total si deux éléments distincts sont toujours comparables*

$$\forall (x, y) \in E, x \neq y \Rightarrow x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Remarque 3.2 *Dans ce qui suit nous noterons une relation d'ordre par $\preceq$ une relation d'ordre stricte par $\prec$.*

3.2.2 Minorants, majorants, minimaux et maximaux

Définition 3.7 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E.*

*On dit que $x \in E$ est un **minorant** de F si on a :*

$$\forall y \in F, x \preceq y.$$

Si le minorant de F est un élément de F on dit que c'est le ***plus petit élément*** *ou* ***le minimum*** de F.

On dit que $x \in E$ est ***un majorant*** de F *si on a :*

$$\forall y \in F, y \preceq x.$$

Si le majorant de F est un élément de F on dit que c'est le ***plus grand élément*** *ou* ***le maximum*** de F.

Définition 3.8 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E.*

- Un élément x est un élément ***minimal*** *de F quand aucun élément de F n'est strictement plus petit que x :*

$$\forall y \in F, y \preceq x \Rightarrow x = y.$$

- Un élément x est un élément ***maximal*** *dans de F quand aucun élément de F n'est strictement plus grand que x :*

$$\forall y \in F, x \preceq y \Rightarrow x = y.$$

Remarque 3.3 *Si la relation est d'ordre total alors les notions d'élément minimal et et de minimum coincident. (Même remarque pour la notion d'élément maximal et de maximum).*

Exemple 3.10 0 *est un élément minimal de* $(\mathbb{N}, \leq)$ *c'est également son minimum.*

Exemple 3.11 *Soit l'ensemble $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) \setminus \{\varnothing\}$ muni de la relation d'ordre partiel $\subset$. Les éléments $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ sont des éléments minimaux mais il n y a pas de minimum.*

3.2.3 Produit d'ordre (ordre lexicographique)

Soit $(E, \preceq_E)$ et $(F, \preceq_F)$ deux ensembles ordonnés. On considère l'ensemble produit $E \times F$ et on définit l'ordre lexicographique $\preceq_{lex}$par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall (x', y') \in E \times F, (x, y) \preceq_{lex} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \preceq_E x' \\ ou \\ x = x' \text{ et } y \preceq_F y'. \end{cases}$$

Si $\preceq_E$ et $\preceq_F$ sont des relations d'ordres totals alors l'ordre lexicographique l'est également.

Exemple 3.12 *L'ordre lexicographique sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est défini par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{N}^2, (x, y) \preceq_{lex} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ ou \\ x = x' \textit{ et } y \leq y'. \end{cases}$$

3.2.4 Ordre bien fondé

Définition 3.9 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné par une relation d'ordre total.*
On dit que $\preceq$ est bien fondé quand il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E.

Remarque 3.4 *On dit également que l'ensemble E est bien ordonné.*

Exemple 3.13 *L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est bien fondé mais pas sur $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{R}^+$.*

Exemple 3.14 *L'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ est bien fondé.*

Théorème 3.5 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. L'ordre $\preceq$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide $F \subset E$ admet un minimum.*

Remarque 3.5 *Soit $(E, \preceq)$ on peut associer à la relation d'ordre $\preceq$ une relation d'ordre strict par la définition suivante :*

$$x \prec y \textit{ si et seulement si } x \preceq y \textit{ et } x \neq y$$

Remarque 3.6 *Soit* $(E, \prec)$ *on peut associer à la relation d'ordre* $\prec$ *une relation d'ordre par la définition suivante :*

$$x \preceq y \text{ si et seulement si } x \prec y \text{ ou } x = y$$

3.3 Preuve par induction

La preuve par induction permet de généraliser la preuve par récurrence à tout ensemble bien ordonné. Le principe de la preuve est le suivant :

Principe Soit $(E, \preceq)$ un ensemble bien ordonné. Notons par e l'élément minimal de E.

Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition dépendant des éléments $x \in E$.

i) On suppose que $\mathcal{P}(e)$ est vraie. **(Initialisation)**

ii) On suppose également que $\forall y \prec x : \mathcal{P}(y) \Rightarrow \mathcal{P}(x)$ est vraie. **(Hérédité)**

Alors la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Théorème 3.6 *Soit* $(E, \preceq)$ *un ensemble ordonné. L'ordre* $\preceq$ *est bien fondé si et seulement si le principe d'induction est correct.*

Preuve. Nous allons seulement démontrer que si l'ordre est bien fondé alors le principe d'induction est correct.

On raisonne par l'absurde, on suppose que $\mathcal{P}(x)$ vérifie les propriétés **(i)** et **(ii)** et qu'il existe des éléments de E qui ne vérifie pas $\mathcal{P}(x)$.

Soit $A = \{x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ est fausse}\}$

A est par conséquent un sous ensemble non vide de E.

Comme l'ordre est bien fondé l'ensemble A possède un élément minimal x_0.

Par conséquent pour tout élément $y \prec x_0$ on a $\mathcal{P}(y)$ vraie par définition.

En appliquant le principe d'hérédité on obtient $\mathcal{P}(x_0)$ vraie ce qui constitue une contradiction. ∎

Exemple 3.15 *On considère la suite $S_{m,n}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par $S_{0,0} = 0$ et la relation suivante :*

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{m-1,n} + 1 \textit{ si } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 \textit{ sinon.} \end{cases}$$

On va montrer que pour toute paire $(m, n) \in \mathbb{N}^2, S_{m,n} = m + n$.

Initialisation : *On commence par prouver la propriété pour l'élément $(0, 0)$*

On a $S_{0,0} = 0 = 0 + 0$ Vérifié.

Hérédité

On montre que si la propriétée est vraie pour toute paire $(m', n') \prec (m, n)$ alors elle est vraie pour (m, n).

On suppose donc qu'on a

$$\forall (m', n') \prec (m, n) : S_{m',n'} = m' + n'$$

On distingue deux cas :

Cas 1 : Si $n = 0$

Dans ce cas nous avons par définition $S_{m,0} = S_{m-1,0} + 1 \overset{Hypothèse}{=} m - 1 + 1 = m + 0$.

Cas 2 : Si $n \neq 0$

Dans ce cas nous avons par définition $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$. On a également $(m, n-1) \prec (m, n)$ donc par hypothèse on a $S_{m,n-1} = m + n - 1$. D'où

$$S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + n - 1 + 1 = m + n.$$

3.4 Théorème du bon ordre général de Zermelo

3.4.1 Préordre

Définition 3.10 *Un ensemble* préordonné *est un ensemble E muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ qui est réflexive et transitive. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est une relation de* préordre..

- *Un ensemble* préordonné *est totalement prordonné si on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$ pour tout x et y de E.*

Exemple 3.16 *L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de la relation de divisibilité entre entiers :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y.$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation de préordre mais n'est pas une relation d'ordre. La preuve est laissée en exercice.

Exemple 3.17 *Entre fonctions réelles d'une variable réelle, la domination est un préordre.*

Nous utiliserons la notation $\preceq$ pour la relation de préordre.

Définition 3.11 *Deux éléments x et y d'un ensemble préodonné E qui sont tels que $x \preceq y$ et $y \preceq x$ sont dits équivalents.*

La notion d'équivalence définie précédement est en fait une relation d'équivalence sur E. Ainsi à chaque relation de préordre est associée une relation d'équivalence.

Définition 3.12 *Soit A une partie d'un ensemble préordonné E.*
La cloture de A noté A^+ est l'ensemble défini par

$$A^+ = \{x \in E : \exists y \in A, x \preceq y \wedge y \preceq x\}$$

l'ensemble A est dit clos si $A = A^+$.

Définition 3.13 *Soient x et y deux éléments ensemble préordonné E. On dit que x est strictement plus petit que y si*

$$x \preceq y \text{ et si } x \text{ n'est pas équivalent à } y.$$

Définition 3.14 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble préordonné et A une partie non vide de E. On dit que $m \in E$ est un* ***minorant*** *de A si tout élément de A est plus grand que x.*

$$\forall y \in F, m \preceq y$$

Si le minorant de A est un élément de A on dit que c'est le ***plus petit élément*** *ou* ***minimum*** *de F.*
On dit que $M \in E$ est ***un majorant*** *de A si tout élément de A est plus petit que M.*

$$\forall y \in F, y \preceq M$$

Si le majorant de A est un élément de A on dit que c'est le ***plus grand élément*** *ou* ***maximum*** *de F.*

Remarque 3.7 *Si le maximum (resp. le minium) quand il existe est unique dans le cas d'une relation d'ordre ce n'est pas le cas pour une relation de préordre. En effet il peut y avoir plusieurs minimums équivalents.*

Exemple 3.18 *Soit la relation de prépordre de divisibilité entre entiers relatifs et l'ensemble $A = \{-2, 2, 4, 8, -8\}$.*
Nous avons deux minimums 2 et -2 et deux maximums 8 et -8.

Définition 3.15 *Une « borne supérieure » (resp. « borne inférieure ») (si elle existe) d'une partie A de E est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp. un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).*

Remarque 3.8 *Plusieurs bornes supérieurs (resp. inférieures) équivalentes peuvent exister.*

Lemme 3.1 *Soit E un ensemble préordonné fini. Alors il existe une application injective croissante $f : E \to \mathbb{N}$.*

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre d'éléments de E.
Pour $n = 1$ la proposition est vérifiée.
Supposons que la proposition est vérifiée pour $n-1$ et on démontre pour n.
Comme E est fini et non vide il existe nécéssairement un élément minimal a de E. Posons $F = E - \{a\}$.
Par hypothèse de récurrence, il existe une application injective croissante $\varphi : E \to \mathbb{N}$.
On définit $f : E \to \mathbb{N}$ en posant $f(a) = 0$ et $f(y) = \varphi(y) + 1$ pour tout $y \in Y$. Cette application est injective et croissante. ■

Définition 3.16 *Un ensemble préordonné E est bien préordonné si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.*

Noter qu'un ensemble bien préordonné est totalement préordonné, et que tout sous-ensemble d'un ensemble bien préordonné est bien préordonné. Un exemple fondamental d'ensemble bien préordonné (en fait bien ordonné) est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ordonné de la manière usuelle).

Définition 3.17 *Un ensemble préordonné est dit « inductif » si toute partie bien ordonnée de E admet un majorant.*

Remarque 3.9 *Un ensemble préordonné inductif ne peut pas être vide, puisque la partie vide de cet ensemble, qui est bien ordonnée, doit avoir un majorant.*

Définition 3.18 *Un* crible *sur un ensemble préordonné E est une partie A de E telle que $x \in A$ et $y \preceq x$ entraînent $y \in A$ (pour tous x et y de E). Le fait que A soit un crible sur E sera noté $A \lhd E$.*

Il est immédiat que l'intersection d'une famille quelconque de cribles sur E est encore un crible sur E. De même, l'union d'une famille quelconque de cribles sur E est un crible sur E. Par ailleurs, il est clair que tout crible est clos.

Lemme 3.2 *Soient A, B deux cribles sur un ensemble E totalement préordonné, alors ou bien $A \lhd B$ ou $B \lhd A$.*

Preuve. En effet, supposons par exemple qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$. Soit $y \in B$. On ne peut pas avoir $x \preceq y$ sinon on aurait $x \in B$. On a donc $y \leq x$ donc $y \in A$ et $B \subset A$. On a donc montré $A \subset B$ ou $B \subset A$ mais comme il s'agit de cribles, alors ou bien $A \lhd B$ ou $B \lhd A$. ■

Définition 3.19 *Soit A une partie d'un ensemble préordonné E et soit $a \in A$. On note $a_A^{\prec}$ le plus petit crible sur A contenant a.*

Il est clair que $a_A^{<}$ n'est autre que l'ensemble $\{x \in A : x \prec a\}$ des éléments de A strictement plus petits que a.

3.4.2 Lemme de Zorn et théorème du bon ordre général

Lemme 3.3 *Soit E un ensemble préordonné, A et B deux parties de E. Si $A \lhd B \lhd E$, alors pour tout $a \in A$ on a $a_A^{\prec} = a_B^{\prec}$.*

Théorème 3.7 (lemme de Zorn) *Tout ensemble préordonné inductif a un élément maximal.*

Théorème 3.8 (Zermelo) *Sur tout ensemble il existe un bon ordre.*

Preuve. Soit E un ensemble. Notons E l'ensemble des couples (A, R) où A est une partie de E et R une relation de bon ordre sur A. Notons $(A, R) \preceq (B, R')$ le fait que $A \subset B$ et R' prolonge R . E est alors un ensemble ordonné inductif (pour toute partie bien ordonnée de E, prendre la réunion de ses éléments). Il résulte donc du lemme de Zorn que E a un élément maximal (A, R). Un tel élément doit nécessairement vérifier $A = E$ (sinon, ajouter un élément à A et décider qu'il est plus grand que tous ceux de A). ■

Remarque 3.10 *Ce bon ordre est difficile à expliciter dans la plupart des ensembles. Par exemple l'ensemble des nombres rationnels peut être bien ordonné par l'ordre lexicographique. Pour les réels aucune relation de bon ordre n'a été établie.*

3.5 Exercices

Exercice 3.1 *Montrer en utilisant le principe du bon ordre que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solution :

On raisonne par l'absurde on suppose que la proposition n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons A l'ensemble des valeurs de n pour lesquels l'identitée n'est pas vérifiée

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{n} i \neq \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

Comme $A \subset \mathbb{N}^*$ alors il possède un minimum noté n_0.

On sait que $n_0 \neq 1$ car l'identité est vérifiée pour 1 en effet on a

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Ainsi comme $n_0 \geq 2$ on obtient que $n_0 - 1 \geq 1$ et par conséquent l'identitée est vérifiée pour $n_0 - 1$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_0-1} i &= \frac{(n_0-1)(n_0-1+1)}{2} = \frac{(n_0-1)(n_0)}{2} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n_0-1} i\right) + n_0 = \frac{(n_0-1)(n_0)}{2} + n_0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_0} i = \frac{(n_0-1)(n_0)}{2} + n_0 = \frac{n_0(n_0+1)}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui constitue une contradiction avec le fait que n_0 ne vérifie par l'identité.

Exercice 3.2 *On considère la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

En utilisant le principe du bon ordre montrer que pour tout entier naturel on a : $1 \leq u_n \leq 2$.

Solution :

On raisonne par l'absurde on suppose que la proposition n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

Notons A l'ensemble des valeurs de n pour lesquels l'identitée n'est pas vérifiée

$$A = \{n \in \mathbb{N} : u_n > 2 \text{ ou } u_n < 1\}$$

Comme $A \subset \mathbb{N}$ alors il possède un minimum noté n_0.
On sait que $n_0 \neq 0$ car l'identité est vérifiée pour 0
Ainsi comme $n_0 \geq 1$ on obtient que $n_0 - 1 \geq 0$ et par conséquent l'identitée est vérifiée pour $n_0 - 1$.

On a alors

$$\begin{aligned} 1 &\leq u_{n_0-1} \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 1 + u_{n_0-1} \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_{n_0-1}} \leq \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1+u_{n_0-1}} \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq u_{n_0} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq u_{n_0} \leq 2 \end{aligned}$$

Ce qui constitue une contradiction avec le fait que n_0 ne vérifie par l'identité.

Exercice 3.3 *Supposons que R est un ordre partiel sur un ensemble E. Montrer que chaque sous ensemble fini $E \subset A$ possède un élément minimal.*