Notions de Logique

1.1 Notions de Logique

Définition 1.1 *On appelle "proposition logique" toute relation P qui est soit vraie soit fausse.*
• *Quand la proposition est vraie, on lui affecte la valeur* 1
• *Quand la proposition est fausse, on lui affecte la valeur* 0.

Ces valeurs sont appelées “Valeurs de vérité de la proposition”.

Exemple 1.1 •*« Il pleut. » est une proposition*
• *« Je suis plus grand que toi. », est une proposition*
• *« $2 + 2 = 4$ » est une proposition*
• *« $2 \times 3 = 7$ » est une proposition*
• *« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$» est une proposition*
• *« Comment allez vous aujourd'hui ? » n'est pas une proposition.*

Ainsi, pour définir une proposition logique, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tableu qu'on nommera “Table de vérités” ou “Tableau de vérités”

1.1.1 Opérations logiques

La négation: $\overline{P}$

Etant donnée une proposition logique P, on appelle négation de P la proposition logique $\overline{P}$, qui est fausse quand P est vraie et qui est vraie quand P est fausse, donc on peut la représenter comme suit:

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

La conjonction "$\wedge$"

Soient P, Q deux propositions logiques, on appelle "conjonction" de P et Q la proposition "$P \wedge Q$", qui est vraie quand P et Q sont vraies à la fois et fausse dans les autres cas.

Sa table de vérité:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
0	0	0
1	0	0
0	1	0

La disjonction "$\vee$"

Soient P, Q deux propositions logiques, on appelle "disjonction" de P et Q la proposition "$P \vee Q$", qui est vraie si l'une des propositions logiques P ou Q est vraie. Sa table de vérité:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
0	0	0
1	0	1
0	1	1

L'implication "$\Longrightarrow$"

Considérons deux propositions logiques P et Q, on note "$P \Longrightarrow Q$" la proposition logique qui est fausse si P est vraie et Q est fausse.
La proposition $P \Longrightarrow Q$ se lit "P implique Q".

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	1

Etant données deux propositions logiques P et Q, alors la table de vérités de $\overline{P} \vee Q$ est la suivante :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1

On voit que cette table est identique à celle de $P \Longrightarrow Q$, donc on dit que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est equivalent à la proposition $\overline{P} \vee Q$.

L'équivalence "$\Longleftrightarrow$"

On dit que les deux propositions logiques P et Q sont logiquement équivalentes, si elles sont vraies simultanément ou fausse simultanément, et on note "$P \Longleftrightarrow Q$", sa table de vérité est

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	0

1.1.2 Règles de Demorgan:

Soient P et Q deux propositions logiques, alors :

1. $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}.$

Preuve. On établit la preuve de ces règles en donnant les valeurs de vérités des propositions logiques correspondantes

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q.}$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0

■

On voit que les propositions logiques $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q.}$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes. De même pour $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$.

Proposition 1.1 *Soient P, Q, R trois propositions logiques alors,*

1. $P \Longleftrightarrow \overline{\overline{P}}$,

2. $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$, *($\vee$ est commutatif)*

3. $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$ *($\wedge$ est commutatif)*

4. $(P \vee Q) \vee R \Longleftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ *($\vee$ est associatif)*

5. $(P \wedge Q) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ *($\wedge$ est associatif)*

6. $(P \wedge Q) \vee R \Longleftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ *($\vee$ est distributive sur $\wedge$)*

7. $(P \vee Q) \wedge R \Longleftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ *($\wedge$ est distributive sur $\vee$)*

8. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$.

9. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)] \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$

Preuve. On se limitera à la preuve des trois dernières propriétés

7.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$P \wedge R$	$Q \wedge R$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0

9.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0

8.

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow R)$	$P \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow Q \wedge Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Ce qui montre que la proposition $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est toujours vraie. ∎

1.2 Les quantificateurs

1.2.1 Le quantificateur $\forall$, ou "pour tout"

Une proposition P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « $x^2 \geq 1$ », l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.

La proposition

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

est une proposition vraie lorsque les propositions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ »

Exemple 1.2 • *«$\forall x \in [1, +\infty[$; $x^2 \geq 1$» est une proposition vraie.*
• *«$\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 \geq 1$ » est une proposition fausse.*
• *« $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 » est vraie.*

1.2.2 Le quantificateur $\exists$, ou "il existe"

La proposition

$$\exists x \in E, \ P(x)$$

est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit « il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie ».

Exemple 1.3 • *«$\exists x \in \mathbb{R}$, $x(x-1) \prec 0$» est vraie*
• *«$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n \succ n$» est vraie*
• *« $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = -4$) » est fausse*

1.2.3 La négation des quatificateurs

• La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \overline{P(x)}$ » .
par exemple la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 \geq 1$ » est l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R}$; $x^2 \prec 1$».
• La négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \overline{P(x)}$ »
par exemple la négation de «$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n \succ n$» est «$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n \leq n$»
• la négation de phrases complexes: soit par exemple la proposition «$\forall x \in E$, $\exists y \in E$, $P(x, y)$»
sa négation est «$\exists x \in E$, $\forall y \in E$, $\overline{P(x, y)}$»

Exemple 1.4 *pour la proposition «$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x + y \succ 0$», sa négation est «$\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x + y \leq 0$»*

Remarque 1.1 *L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques*

$$«\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \succ 0» \quad et \ «\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y \succ 0»$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet la première phrase affirme que « Pour tout réel x, il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que $x + y > 0$.» (par exemple pour un x donné on peut prendre $y = -x + 1$). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : « Il existe un réel y, tel que pour tout réel x, $x + y > 0$. » Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x.

1.3 Types de raisonnements

1.3.1 Raisonnement direct:

On veut montrer que la proposition "$P \Longrightarrow Q$" est vraie,
On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple 1.5 *Montrer que "$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+,\, x \leq y \Longrightarrow x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$*

Preuve. $x \leq y \Longrightarrow x + x \leq x + y$
$\Longrightarrow 2x \leq x + y$
$\Longrightarrow x \leq \dfrac{x+y}{2}$.............(1)
$y \geq x \Longrightarrow x + y \leq y + y$
$\Longrightarrow \dfrac{x+y}{2} \leq y$............(2)
de (1) et (2) on a: $x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$
Alors $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+,\, x \leq y \Longrightarrow x \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y$ est vraie ■

1.3.2 Cas par cas

Si on veut vérifier une proposition $P(x)$ pour tout les x dans un ensemble E, on montre la proposition $P(x)$ pour les $x \in A \subset E$, puis pour les $x \notin A$.

Exemple 1.6 *Montrer que :*$\forall x \in \mathbb{R},\, |x-1| \leq x^2 - x + 1.$

Preuve. • Si $x \geq 1 : |x-1| = x - 1$, alors $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$.
Ainsi $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.
• si $x \prec 1 : |x-1| = -x + 1$, alors $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + x - 1 = x^2 \geq 0$.
Ainsi $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.
Conclusion: dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$. ■

1.3.3 Contraposé

Le raisonnement par "contraposition" est basé sur l'équivalence suivante:

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion "$P \Longrightarrow Q$" on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.7 *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 *est pair alors* n *est pair.*

Preuve. on veut montrer que *si* n^2 est impair$\Longrightarrow n$ est impair.
n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$, alors $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2\left(2k^2+2k\right)+1 = 2\alpha+1$, alors n^2 est impair. ■

1.3.4 Absurde

Le raisonnement par "l'absurde" pour montrer que "$P \Longrightarrow Q$" est basé sur le principe suivant "on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse, et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc "$P \Longrightarrow Q$" est vraie.

Exemple 1.8 *Montrer que:* $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$,*si* $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ *alors* $x = y$.

Preuve. on suppose que $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ et $x \neq y$.
Comme $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ alors $x(1+x) = y(1+y)$ donc $x + x^2 = y + y^2$ d'où $x^2 - y^2 = -x + y$ donc $(x-y)(x+y) = -(x-y)$.
Comme $x \neq y$ alors $x - y \neq 0$ et donc en divisant par $x - y$ on obtient $x + y = -1$ c'est une contradiction (la somme de deux nombres positifs est positive)
Conclusion: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, si $\dfrac{x}{1+y} = \dfrac{y}{1+x}$ alors $x = y$. ■

1.3.5 Contre exemple

Par contre exemple pour montrer que "$\forall x \in E,\ P(x)$" est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Exemple 1.9 *Montrer que "tout entier positif est somme de trois carrés"*

Preuve. Considérons l'entier $n = 7$, les carrés inferieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais $0 + 1 + 4 \neq 7$.
■

1.3.6 Récurrence

Le principe de "récurrence" permet de montrer qu'une proposition $P(n)$ dépend de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1) "L'initialisation": on verifie que $P(0)$ est vraie,

2) "L'hérédité": on suppose $n > 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que la proposition $P(n+1)$ au rang suivant est vraie.

3) La conclusion: on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.10 *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Preuve. 1- <u>l'initialisation</u> : pour $n = 0$, on $0^2 = 0$, alors $P(0)$ est vraie
2- <u>l'hérédité</u> :pour $n > 0$, on suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie, et on montre que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ est vraie.
$P(n)$ est vraie alors $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
On a $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6}$
$= \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
D'où $P(n+1)$ est vraie
3- Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ■

1.4 Exercices

Exercice 1.1 *Soient les quatre assertions suivantes :*
a)$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \succ 0,$
b)$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \succ 0.$
c)$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \succ 0,$
d)$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \succ x.$
1) Les assertions a, b, c, d, sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.
2) Soient P, Q, et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :
a) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, *b)* $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$.

Solution 1.1 *a) est fausse puisque sa négation est* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$, *est vraie. Etant donné* $x \in \mathbb{R}$, *il existe toujours* $y \in \mathbb{R}$, *tel que* $x + y \leq 0$, *par exemple on peut prendre* $y = -(x+1)$ *et alors* $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.
b) est vraie, pour un x donné on peut prendre par exemple $y = -x + 1$, *et alors* $x + y = 1 \succ 0$. *La négation de b) est* $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.
c) est fausse par exemple $x = -1,\ y = 0$. *La négation est* $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$.
d) est vraie, on peut prendre $x = -1$, *la négation est* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x$.

Exercice 1.2 *Soient f et g deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes*
1) f est majorée ; 2) f est bornée ; 3) f est paire ; 4) f ne s'annule jamais ; 5) f est périodique

;

6) f est croissante ; *7) f n'est pas la fonction nulle ;* *8) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.*

Solution 1.2 *1)* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$

2) $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M.$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x).$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$

5) $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x).$

6) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$

7) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$

8) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = n.$

Exercice 1.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :*

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ *et* $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x).$

b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ *et* $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x).$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$ *et* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M.$

Solution 1.3 *a) La première assertion est verifiée par toute application, la seconde signifie que f est constante.*

b) La première assertion signifie que f prend toute valeur dans $\mathbb{R}$, la seconde est absurde.

c) La première assertion est toujours verifiée, la seconde signifie que f est majorée.

Exercice 1.4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

On considère les assertions suivantes:

$P :$ "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$"

$Q :$ "$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$"

$R :$ " $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \succ 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \prec 0)$ "

Parmi les implications suivantes les quelles sont vraies?

a) $P \Longrightarrow Q,$ *b)* $Q \Longrightarrow P,$ *c)* $Q \Longrightarrow R$

d) $\overline{R} \Longrightarrow Q,$ *e)* $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P},$ *f)* $\overline{P} \Longrightarrow \overline{R}.$

Solution 1.4 *seulement les assertions: a) d) e) sont vraies.car :*

a) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \Longrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0).$

d) $[(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)] \Longrightarrow [\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0].$

e) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0) \Longrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0).$ *(la contraposé de a))*

Exercice 1.5 *Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer.*

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$

1). n premier$\Longrightarrow n = 2$ ou n est impair,

2) $x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$

Solution 1.5 *1) n paire, $n \neq 2 \Longrightarrow n$ non premier*
si n est paire, $n \neq 2$ alors 2 divise n et n n'est pas premier.
2) $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Longrightarrow x = y$.
si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors en dévellopant: $-x+y = x-y$, d'où $2y = 2x$, ainsi $x = y$.

Exercice 1.6 *1) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.*
2). A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 sont premiers.

Solution 1.6 *1) Soit n non premier, supposons que n n'a pas de diviseur premier $p \leq \sqrt{n}$.*
n non premier$\Longrightarrow \exists a, b \geq 2$, $n = ab$, tout nombre $x \geq 2$ a un diviseur premier $\leq x$.
Si $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$, cela donne une contradiction, donc $a \succ \sqrt{n}$ et $b \succ \sqrt{n}$, ce qui implique $n \succ n$. (absurde)
2) $\bullet\sqrt{89} \simeq 9.4$, le nombre 89 n'est pas divisible par $2, 3, 5$ ou 7, donc 89 est premier.
$\bullet$ $\sqrt{167} \simeq 12.9$, le nombre 167 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7$ ou 11 donc 167 est premier.

Exercice 1.7 *1) Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.*
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 6.
3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$, $n^2 \leq 2^n$.

Solution 1.7 *1) (raisonnement cas par cas)*
Si $n = 2k$ (paire) alors, 4 divise $n^2 = 4k^2$.
Si $n = 2k+1$ (impaire) alors, 4 divise $n^2 - 1 = 4\left(k^2 + k\right)$
2) (raisonnement cas par cas)
On a $n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right)$.
n paire $\Longrightarrow n^3 - n$ multiple de 2.
n impaire $\Longrightarrow n^2 - 1$ paire et $n^3 - n$ multiple de 2.
n multiple de $3 \Longrightarrow n^3 - n$ multiple de 3
$n = 3k+1 \Longrightarrow n^2 - 1 = 3\left(3k^2 + 2k\right)$ multiple de $3 \Longrightarrow n^3 - n$ multiple de 3
$n = 3k+2 \Longrightarrow n^2 - 1 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right)$ multiple de $3 \Longrightarrow n^3 - n$ multiple de 3
Dans les 3 cas, $n^3 - n$ est multiple de 3.
$n^3 - n$ est divisible par 2 et 3 qui sont premiers entre eux donc $n^3 - n$ est divisible par 6.
3) (Par réccurence) :
$\bullet$ pour $n = 4$, $4^2 = 16 = 2^4$. (la propriété est vraie)
$\bullet$ on suppose que $n^2 \leq 2^n$ avec $n \geq 4$,
(pour $n \succ 2$ on a $2n \prec n^2 - 1$), d'où:
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + n^2 \leq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
la propriété est vraie au rang $n+1$