Part I

Chapitre 2: Théorie des ensembles

1 Téorie naïve des ensembles

- La théorie naïve des ensembles s'organise de la façon suivante :

1.1 Notion d'ensemble

- Ensemble, élément et appartenance
- Égalité de deux ensembles
- Paires et singletons
- Définition d'un ensemble en extension
- Définition d'un ensemble en compréhension

1.2 Sous-ensembles

- Ensemble vide
- Ensemble universel
- Inclusion. Sous-ensembles et sur-ensembles
- Inclusion large et inclusion stricte. Sous-ensembles propres
- Ensemble des parties

1.3 Opérations sur les ensembles

- Réunion
- Intersection
- Différence. Compléments absolu et relatif
- Différence symétrique

1.4 Couple et produit cartésien

- Notion de couple
- Produit cartésien de deux ensembles. Carré cartésien
- n-uplets. Produit cartésien généralisé. Puissances cartésiennes
- Somme disjointe de deux ensembles

1.5 Correspondances et Relations

- Notion de correspondance
- Propriétés des correspondances. Notion de fonction
- Relation binaire
- Relation ternaire. Lois de composition
- Première approche des cardinaux
- Relation binaire d'équipotence
- Notion de cardinal

2 Paradoxe de Russel et autres versions

Énoncé 1 *L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?*

Si on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction à nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend paradoxale l'existence d'un tel ensemble. Réécrit plus formellement, si l'on pose :

$$Y = \{X | X \notin X\}$$

on a immédiatement que $Y \in Y \Leftrightarrow Y \notin Y$

Ce paradoxe a autre versions comme:

- le paradoxe du menteur (un menteur dit qu'il ne ment pas).
- le paradoxe du barbier (le barbier ne peut raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes), le barbier doit se raser ou garde la barbe?
- Le paradoxe du bibliothécaire (Bery) (Le plus petit entier naturel non descriptible par une expression de quinze mots ou moins)

3 Quelques théorèmes importants de la théorie des ensembles

3.1 Théorème de Cantor sur l'ensembe des parties

Énoncé 2 *Le cardinal d'un ensemble E est toujours strictement inférieur au cardinal de l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire essentiellement qu'il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.*

Preuve. Soient f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ et A un sous ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à leurs image ($A = \{x \in E | x \notin f(x)\}$). Alors $A \in \mathcal{P}(E)$ et n'a aucun antécédant dans E (raisonnement par l'absurde), ce qui fait f est non surjective. ■

Conséquences du théorème:

1. Il n'existe pas l'ensemble de tous les ensembles.
2. l'ensemble des entiers naturels est infini (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plus grand cardinal).

3.2 Théorème de Cantor-Bernstein sur l'equipotence

Énoncé 3 ***L****'existence d'une bijection entre deux ensembles dès lors qu'il existe deux injections, l'une du premier vers le second, l'autre du second vers le premier.*

4 Axiome du choix (AC)

Énoncé 4 *Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X, appelée fonction de choix, qui à chaque ensemble A appartenant à X associe un élément de cet ensemble A.*

$$f : X \underset{A \longmapsto f(A) \in A}{\longrightarrow} \cup X$$

Énoncés équivalents:

Énoncé 5 *Théorème de Zermelo : « Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.*

Le théorème de Zermelo implique immédiatement l'axiome du choix : si E est muni d'un bon ordre, le minimum pour celui-ci fournit une fonction de choix sur l'ensemble des parties non vides de E

Énoncé 6 *Lemme de Zorn : « Tout ensemble inductif admet un élément maximal ».*

Le lemme de Zorn implique le théorème de Zermelo.

Autres formulations de l'axiome du choix:

(1) Pour tout ensemble E, il existe une fonction qui à chaque partie non vide de E associe un élément de cette partie.

(2) Pour toute relation d'équivalence R, il existe un système de représentants des classes de R.

(3) Toute surjection possède une section.

(4) Le produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'une famille $(Xi)_{i \in I}$ d'ensembles non vides est non vide.

4.1 Exemples de théorèmes nécessitant l'axiome du choix

- La première utilisation explicite de cet axiome est due à Peano, en 1890, pour démontrer l'existence de certaines solutions d'équations différentielles.

- Le théorème de la base incomplète en dimension quelconque (et même simplement l'existence d'une base pour tout espace vectoriel) n'est vrai qu'en supposant l'axiome du choix.
- Le théorème de Krull (tout idéal propre d'un anneau commutatif est contenu dans un idéal maximal) est équivalent à l'axiome du choix.
- Le théorème de Zorn (l'équivalence de l'axiome du choix) est nécessaire pour démontrer que tout anneau principal est un aneau factoriel
- L'axiome du choix permet d'affirmer l'existence de parties de $\mathbb{R}$ non mesurables au sens de Lebesgue.
- L'ensemble $^*\mathbb{R}$ des hyperréels doit son existence à l'axiome de choix.
- En théorie des graphes, les nombres chromatiques de la ligne et du plan dépendent de l'axiome du choix.

4.2 Formes faibles de l'axiome du choix

Axiome du choix dénombrable ($\mathbf{AC}_\omega$)

Énoncé 7 *Étant donnée une famille dénombrable d'ensembles non vides, il existe une fonction qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.*

Il est par exemple utilisé pour démontrer :

- qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable;
- qu'un ensemble qui n'est pas fini au sens usuel est infini au sens de Dedekind (c'est-à-dire équipotent à l'un de ses sous-ensembles stricts);
- qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est continue en un point x dès qu'elle est séquentiellement continue en x ;
- qu'un produit dénombrable d'espaces compacts est compact ;
- le théorème de Hahn-Banach pour un espace de Banach séparable ;
- le théorème des fermés emboités (dont l'une des conséquences est le théorème de Baire).

5 L'ypothèse du continu (HC), la puissance du continu

Énoncé 8 *Tout ensemble strictement plus grand, au sens de la cardinalité, que l'ensemble des entiers naturels doit contenir une « copie » de l'ensemble des nombres réels.*

Le cardinal du dénombrable est noté $\aleph_0$ (aleph-zéro). Le cardinal qui suit immédiatement $\aleph_0$ est noté $\aleph_1$; c'est le cardinal de $\mathbb{R}$, celui de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, que l'on note $2^{\aleph_0}$. Le fait que deux cardinaux soient nécessairement comparables est une conséquence de l'axiome du choix. Le continu désigne la droite réelle $\mathbb{R}$, d'où le nom de l'hypothèse. On dit d'un ensemble équipotent à $\mathbb{R}$ qu'il a **la puissance du continu.**

Sans faire appel aux cardinaux (ni à l'axiome du choix)., l'hypothèse du continu ainsi est reformulé comme suit:

Énoncé 9 *Tout sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels est soit fini, soit infini dénombrable, soit possède la puissance du continu.*

Exercice 1 *Montrer que tout intervale borné de* $\mathbb{R}$ *a la puissance du continu.*

Exercice 2 *Montrer que le cardinal de* $\mathbb{R}$ *est celui de l'ensemble* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *des parties de* $\mathbb{N}$.

Exercice 3 *Soit* E *un ensemble.*

1. *Définir une structure algébrique sur l'ensemble* $\mathcal{P}(E)$ *des parties de* E.
2. *Existe-il un isomorphisme entre* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 4 *(Recherches et exposés) Chercher les épreuves des théorèmes cités dans les sou-sections* 4.1 *et* 4.2 *de l'axiome du choix.*