STATIQUE

La statique est la partie de la mécanique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels soumis à un ensemble de forces. Ces systèmes peuvent se réduire à un point matériel, un ensemble de points matériels, un solide ou à un ensemble de solides. Dans ce chapitre nous analyserons les actions mécaniques exercées sur ces systèmes à travers l'étude de l'équilibre de celui-ci.

Un système matériel est en équilibre statique par rapport à un repère donné, si au cours du temps, chaque point de l'ensemble garde une position fixe par rapport au repère.

1. Les systèmes de forces dans l'espace

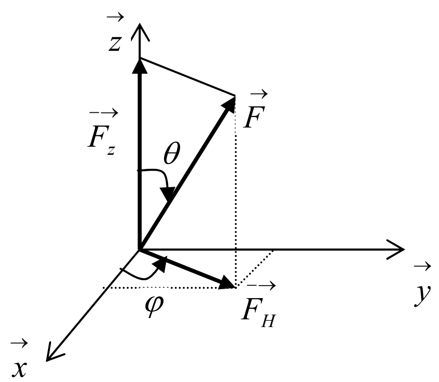
Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

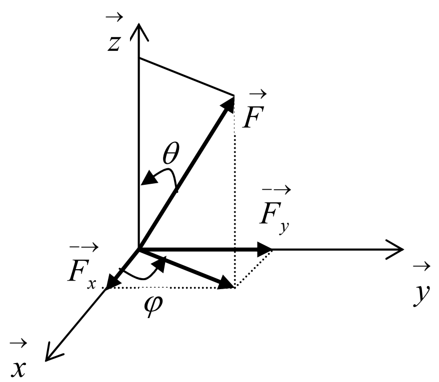
Concourants : les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.

- **Parallèles :** les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'interceptent à l'infini
- **Non concourantes et non parallèles :** les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

1.1. Composantes d'une force

Soit une force $\vec{F}$ appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les composantes de cette force sont définies par :





$$\vec{F} = \vec{F_H} + \vec{F_z} = \vec{F}\sin\theta + \vec{F}\cos\theta = \vec{F}\sin\theta\cos\varphi + \vec{F}\sin\theta\sin\varphi + \vec{F}\cos\theta$$

$$\vec{F} = F\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + F\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + F\cos\theta\,\vec{k}$$

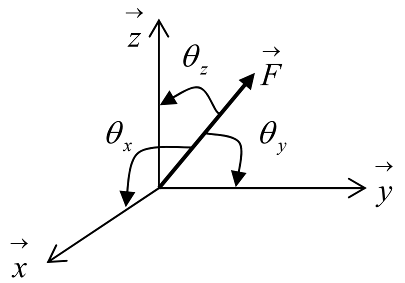
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$ nous avons aussi : $F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}$

1.2. Cosinus directeurs

Les projections de la force $\vec{F}$ sur les trois axes ox, oy, oz donnent respectivement les angles :

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ nous aurons alors :

$F_x = F\cos\theta_x \quad , \quad F_y = F\cos\theta_y \quad , \quad F_z = F\cos\theta_z$



Si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires du repère nous aurons : $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$

$\vec{F} = F(\cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}) = F\,\vec{\lambda}$ avec $\vec{\lambda} = \cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}$

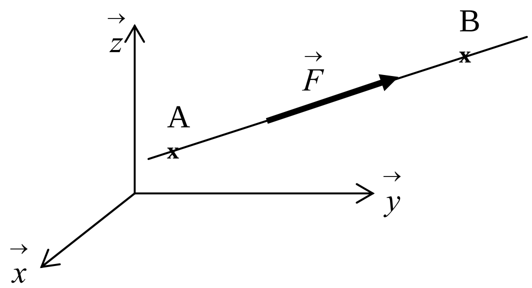
Le vecteur $\vec{\lambda}$ a la même direction que la force $\vec{F}$ et pour module 1. $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

2. Force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action

Soient deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ appartenant à la droite (Δ) support de la force $\vec{F}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrira : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$

$$\overrightarrow{AB} = d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = d$$



Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire le long de la ligne d'action de la force. Il est donné par :

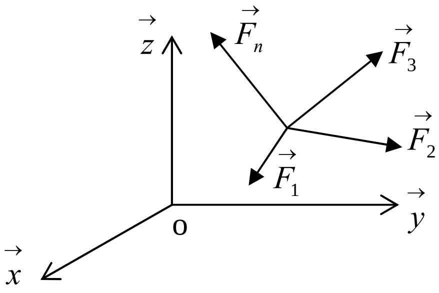
$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \dfrac{d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k}}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}} = \dfrac{1}{d}(d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k})$ Comme la force est donnée par :

$\vec{F} = F\,\vec{u} = \dfrac{F}{d}(d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k})$,

Composantes suivant les trois axes du repère : $F_x = F\dfrac{d_x}{d} \quad , \quad F_y = F\dfrac{d_y}{d} \quad , \quad F_z = F\dfrac{d_z}{d}$.

3. Equilibre d'un point matériel

On appelle, point matériel, une particule suffisamment petite pour pouvoir négliger ses dimensions et repérer sa position par ses coordonnées.



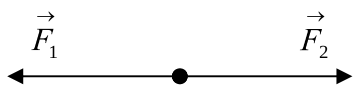
Un point matériel est en équilibre statique lorsque la somme de toutes les forces extérieures auxquelles il est soumis, est nulle.

Ces forces peuvent être coplanaire ou dans l'espace.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + ... + \vec{F}_1 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Une particule soumise à deux forces est en équilibre statique si les deux forces ont le même module, la même direction mais de sens opposé tel que leur résultante, soit nulle.

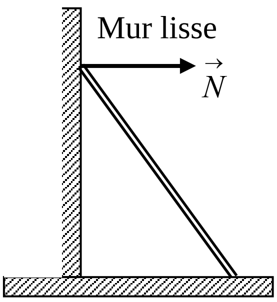
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \quad ; \quad F_1 - F_2 = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = F_2$$

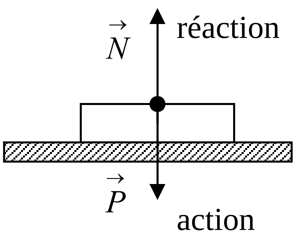


4. Liaisons des solides

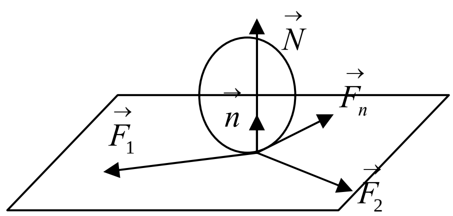
4.1. Liaisons sans frottements

Dans le cas d'une liaison sans frottement entre un solide et un plan, la réaction est toujours normale au plan au point de contact quelques soit le nombre de forces extérieures appliquées au solide.





$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$$



$$\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Dans le cas d'un contact ponctuel sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce même point. $\vec{N} + \sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$

4.2. Liaisons entre solides avec frottements

On pose une pièce de bois en forme de parallélépipède sur un plan horizontal. Cette pièce de bois est en équilibre statique. La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids de la pièce.

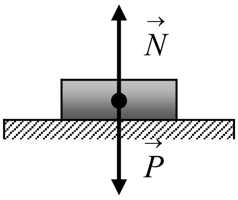


Figure : b.1

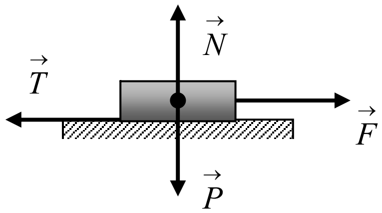
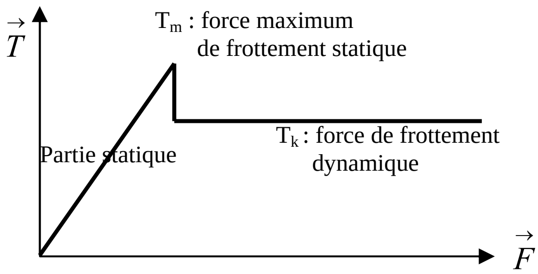


Figure : b.2

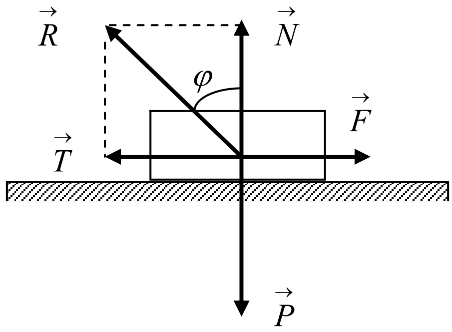
Appliquons graduellement en un point de cette pièce une force horizontale $\vec{F}$ (figure : b.1)
La pièce ne bougera pas tant que cette force est inférieure à une certaine valeur limite, il existe alors une contre force $\vec{T}$ qui équilibre et s'oppose à cette force $\vec{F}$. $\vec{T}$ est appelée force de frottement statique.
Elle résulte d'un grand nombre de paramètres liés aux états de surfaces, à la nature des matériaux et aux forces de contact entre la pièce et la surface considérée.
Cette force de frottement statique obéit à la variation représentée sur la figure suivante.
Si μ_0 est le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact)* nous pouvons écrire :



- Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : $|\vec{T}| \prec \mu_0 |\vec{N}|$
- A l'équilibre limite on aura : $|\vec{T}| = \mu_0 |\vec{N}|$

Dans le cas d'une surface avec frottements (figure ci-dessous), la condition d'équilibre s'écrira : $\vec{N}+\vec{T}+\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$ (la somme des actions et des réactions, est nulle)

$$\mu_0 = \frac{\vec{T_m}}{\left|\vec{N}\right|} = tg\varphi$$



La force de frottement $\vec{T}$ est dirigée dans le sens contraire du mouvement et l'angle φ est appelé angle de frottement statique.

Si $\vec{F} \succ \left|\vec{T_m}\right|$ le solide se met en mouvement de glissement sur la surface.

$$\vec{T} = k\ \left|\vec{N}\right| \quad avec\ \ k\ <\ \mu_0 \quad et \quad tg\ \varphi = \frac{\left|\vec{T}\right|}{\left|\vec{N}\right|} \ = \ k$$

Ce coefficient **k** indépendant du temps est appelé coefficient de frottement dynamique, il est aussi indépendant de la vitesse.

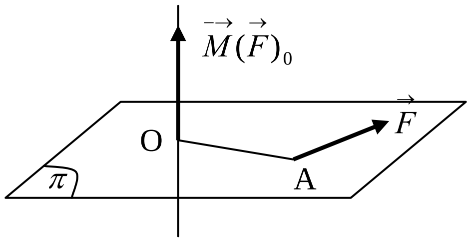
Ce tableau reprend quelques coefficients de frottement statiques et dynamiques des surfaces de matériaux en contact :

	Coefficient de frottement statique μ_0	Coefficient de frottement dynamique k
Acier / Acier	Mouillé 0.1 A sec 0.6	0.05 0.4
Bois / Bois	Mouillé 0.5	0.3
Métal / glace	0.03	0.01
Téflon / Acier	0.04	0.04
Cuivre / Acier	A Sec 0.5	0.4

5. Système de forces

5.1 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment $\overrightarrow{M(\vec{F})_0}$ par rapport à un point O, d'une force $\vec{F}$ appliquée au point A est égale au produit vectoriel : $\overrightarrow{M(\vec{F})_0} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$. Le trièdre formé par les vecteurs $(\overrightarrow{M(\vec{F})_0}, \overrightarrow{OA}, \vec{F})$ est direct.

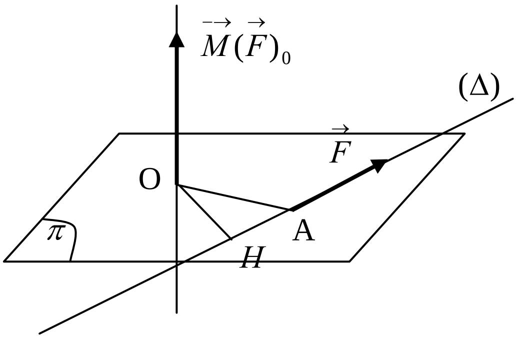


Remarque :
Le moment d'une force, glissant le long d'un axe (Δ), par rapport à un point O est indépendant du point A où elle s'applique.

$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{F}$ avec $\overrightarrow{OH} \perp (\Delta)$

$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{F}$ comme $\overrightarrow{HA} \,//\, \vec{F}$

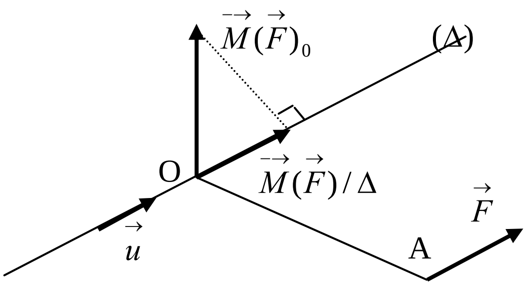
Alors $\overrightarrow{HA} \wedge \vec{F} = \vec{O}$ d'où $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}$



5.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit O un point sur l'axe (Δ) et $\vec{u}$ vecteur unitaire porté par cet axe.

On détermine le moment par rapport au point O, noté : $\overrightarrow{M(\vec{F})}/_O$, sa projection sur l'axe (Δ) est donnée par : $\overrightarrow{M(\vec{F})}/_\Delta = \left(\overrightarrow{M(\vec{F})}/_O \bullet \vec{u}\right) \vec{u}$



5.3 Théorème de VARIGNON

Le moment d'un système de forces concourantes en un point A par rapport à un point O est égal au moment de la résultante des forces par rapport au point O.

Dans les deux cas de figure nous montrerons que le moment résultant est égal au moment de la résultante des forces du système.

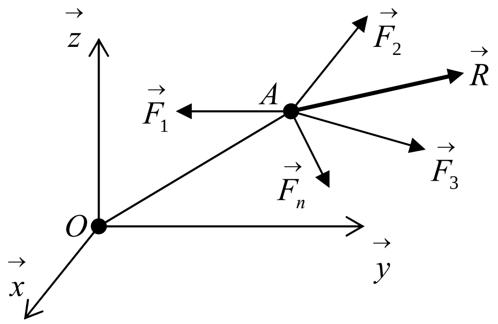


figure :a

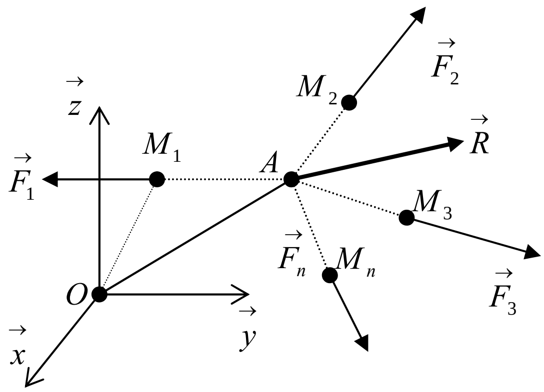


figure :b

Figure a : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}(A)$ et le moment au point O est donné par :

$$\overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O} = \sum_i \vec{M_i}(\vec{F_i}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F_n}$$

$$\overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O} = (\overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F_n})$$

$$\overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \sum_i \vec{F_i} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}$$

Figure b : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}(M_i)$

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1} \;,\; \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2} \;,\; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_n}$$

$$\sum_i \vec{M_i}(F_i)_{/O} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{OM_n} \wedge \vec{F_n}$$

$$\sum_i \vec{M_i}(F_i)_{/O} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1}) \wedge \vec{F_1} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2}) \wedge \vec{F_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_n}) \wedge \vec{F_n}$$

Or $\overrightarrow{AM_i} // \vec{F_i}$ =====> $\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F_i} = \vec{0}$; on obtient finalement :

$$\sum_i \vec{M_i}(\vec{F_i})_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F_n}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O}$$

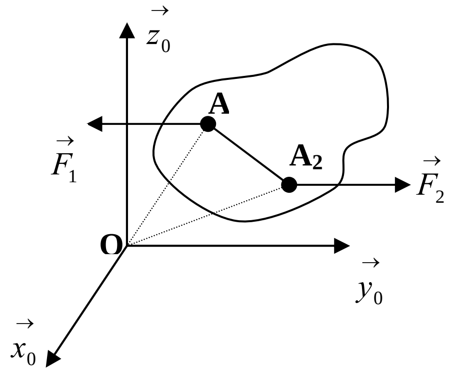
5.4. Moment d'un couple de forces

Un couple de force est défini par deux forces de même module, de sens opposée et portées par deux droites parallèles tel que : $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$; $F_1 = F_2$

$$\sum_i \vec{M_i}(\vec{F_i})_{/O} = \vec{M_1}(\vec{F_1})_{/O} + \vec{M_2}(\vec{F_2})_{/O}$$

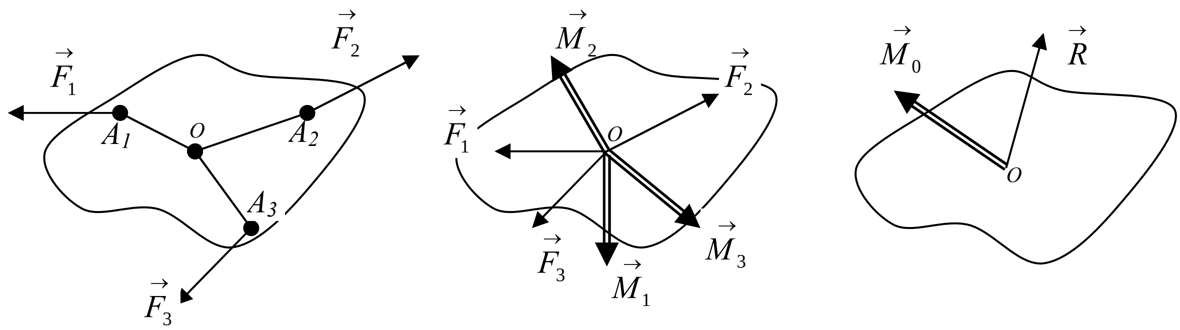
$$= \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F_2} = (-\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) \wedge \vec{F_2}$$

$$\sum_i \vec{M_i}(\vec{F_i})_{/O} = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{F_2}$$



La somme des forces, est nulle mais le moment n'est pas nul. Un couple de force produit uniquement un mouvement de rotation. Le moment d'un couple est indépendant du point où on le mesure, il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des deux forces.

- Un couple ne peut jamais être remplacé par une force unique ;
- Un système force couple tel que $\vec{M} \perp \vec{F}$ peut toujours se réduire en une résultante unique. On choisit la résultante des forces au point O où s'applique le moment de telle sorte que son propre moment soit nul et le moment en ce point serait égal à la somme des moments de toutes les forces du système.



6. Statique du solide

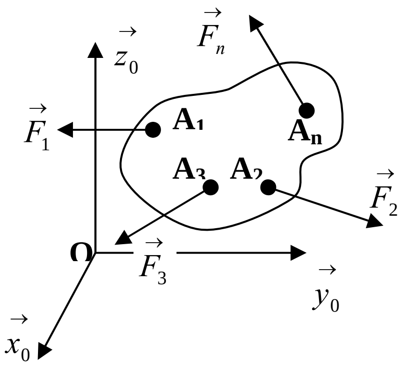
Tous les solides que nous étudierons dans ce chapitre sont considérés indéformables : la distance entre deux points du même solide reste constante quels que soit les systèmes de forces extérieures appliqués.

On considère un solide *(S)* quelconque soumis à des forces : $(\vec{F}_1, \vec{F}_2\, \vec{F}_3 \ldots\ldots\ldots, \vec{F}_n)$ appliquées aux points : $(M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots\ldots\ldots M_n)$

6.1. Equilibre du solide

Pour que le solide soit en équilibre statique il faut et il suffit que :

- *La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, soit nulle ;*
- *Le moment résultant de toutes ces forces en un point O, soit nul.*



- $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
- $\overrightarrow{M}_{/O} = \sum_i \overrightarrow{M(F_i)}_{/O} = \vec{0}$

Un solide *(S)*, soumis à des actions mécaniques extérieures est en équilibre statique si et seulement si le torseur représentant l'ensemble de ces actions est un torseur nul.

Ces deux équations vectorielles se traduisent par les six équations scalaires suivantes :

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M}_{/O} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Le système est complètement déterminé si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations indépendantes.

6.2.Equilibre d'un solide dans un plan

Dans le cas d'un solide soumis à des forces coplanaires, le système précédent se réduit à trois équations scalaires.

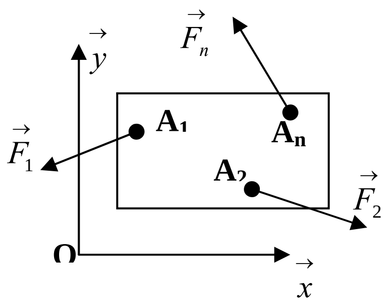
Soit *(xoy)* , le plan contenant les forces appliquées au solide, nous avons alors :

$z = 0$ et $F_z = 0 \Leftrightarrow M_x = M_y = 0$ et $M_z = M_{/O}$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0 \quad ; \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0 \quad ; \quad M_{/O} = \sum_i M_{iz} = 0$$

$$\vec{F}_i = \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} ; \quad \overrightarrow{OA}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases}$$



$$\overrightarrow{M}_{i/O} = \overrightarrow{OA}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ x_i F_{iy} - y_i F_{ix} = M_{iz} \end{cases}$$

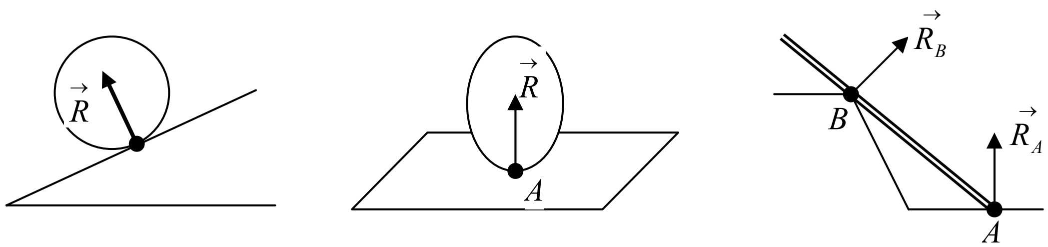
$$M_{/O} = \sum_i M_{i/O} = 0$$

6.3. Réactions aux appuis et aux liaisons à deux dimensions

6.3.1. Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse

Les contacts entre les solides sont ponctuels.

Soit *(S)* un solide reposant sur une surface *(P)* , on dit que le point A du solide est un point d'appui s'il reste continuellement en contact de la surface *(P)*. Si le plan *(P)* est parfaitement lisse alors la force de liaison (la réaction $\vec{R}$) au point de contact est normale à ce plan.

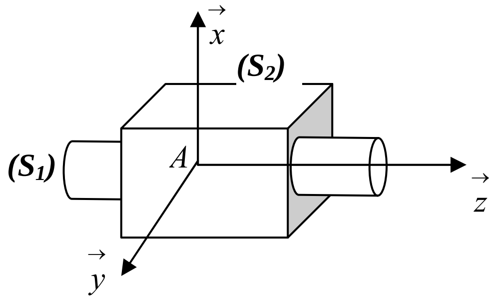


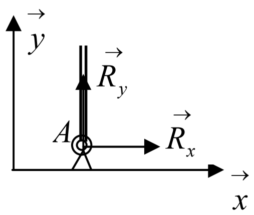
6.3.2. Articulation d'un solide

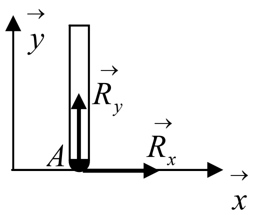
Un point A d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace.

a) Liaison verrou (Articulation cylindrique)

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S_1) a deux degrés de liberté par rapport au solide (S_2) : Une translation suivant l'axe *Az*, et une rotation autour du même axe.

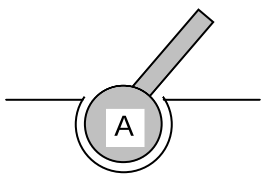


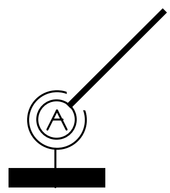


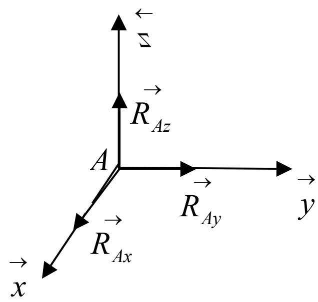


$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$ avec $\vec{R}_{Az} = \vec{0}$ **La réaction suivant l'axe de l'articulation *(Az)* est nulle.**

b) Liaison rotule (Articulation sphérique)







Liaison sphérique : 3 degrés de liberté (rotations)

La réaction au point A de l'articulation sphérique a trois composantes : $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az}$

c) Encastrement d'un solide

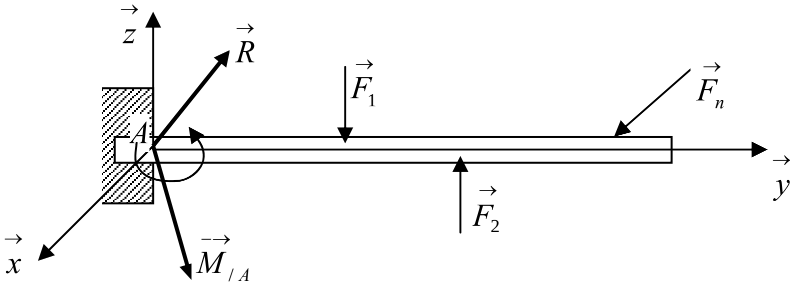
On dit qu'un solide est encastré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$: la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point A

$\vec{M}_{/A}$: le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}$$

$$\overrightarrow{M_{/A}} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F_i}$$

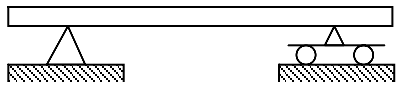


d) Combinaisons de liaisons

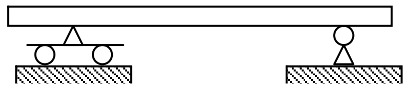
Avec ces différents types de liaisons *(Appui simple, articulation cylindrique, articulation sphérique et encastrement)* nous pouvons réaliser des comobinaisons qui permettent de réaliser montages mécaniques statiquement déterminés.

Exemples:

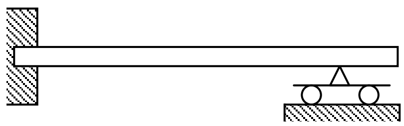
(1) Appui simple deux fois



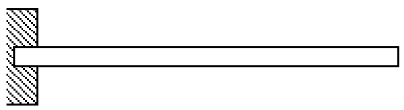
(2) Appui simple et une articulation



(4) Encastrement et appui simple



(3) Encastrement seul



Ces combinaisons sont dites isostatiques (statiquement déterminées) si le nombre d'inconnues est inférieures au nombre d'équations indépendantes qu'on peut établir. Certaines combinaisons ne sont pas autorisées et ne peuvent trouver la solution par la statique seule.

Exemples : *2 appuis articulés, une articulation et un encastrement, encastrement deux fois.*

Certaines combinaisons sont hyperstatiques, elles ne peuvent trouver solution par la statique.

Exemple : appui simple trois fois

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	$\vec{R}$: la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$: deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe *Oz*	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.