مدخل إلى المصفوفات

تعريف: يمكننا تعريف مصفوفة الأعداد الحقيقية ذات البعد $n \times p$ على أنها تطبيق معرف كما يلي:

$$A : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

وتكتب على شكل جدول يحوي أعداد حقيقية مرتبة في شكل أعمدة وأسطر كما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

* حيث عدد الأعمدة هو p الذي يمثل بعد مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}^p$.
* و عدد الأسطر هو n الذي يمثل بعد مجموعة الوصول $\mathbb{R}^n$

أمثلة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e = (1, 3, 7, 8).$$

تعريف

نرمز لعناصر المصفوفة A ب a_{ij} حيث i يمثل السطر المتواجد فيه العنصر و j تمثل العمود المتواجد فيه العنصر

* في الأمثلة السابقة:

$a_{11} = 1$, $B_{12} = 2$

$c_{21} = 0$

تعريف:

* نسمي المصفوفة المربعة التي يتساوى عدد أسطرها مع عدد أعمدتها.
* ~~نسمي المصفوفة سطر التي يمثل عدد أسطرها~~
* نسمي المصفوفة سطر المصفوفة التي تحتوي على سطر واحد
* نسمي المصفوفة عمود المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد.

تعريف:

* نسمي بالمصفوفة الصفرية ذات البعد $n\times p$ كل مصفوفة تحوي على n سطر و p عمود وكل معاملاتها معدومة.

* نسمي مصفوفة الوحدة ذات البعد n كل مصفوفة تحوي n سطر و n عمود وتكتب من الشكل:

$$I_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة صفرية ذات بعد 2×2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة صفرية ذات بعد 2×3

$I_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة وحدة ذات بعد 3.

جمع المصفوفات

لتكن A و B مصفوفتين من نفس البعد

المجموع $A+B$ للمصفوفتين A و B نتحصل عليه من خلال جمع عناصر A مع عناصر B المتواجدة في نفس السطر والعمود كمايلي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

الجمع: $A+B$ يساوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{n1}+a_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 1+3 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

تعريف: لتكن A مصفوفة و k عدد حقيقي نعرف:

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 3 \\ 3\times 0 & 3\times 1 & 3\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

خصائص: A, B, C ثلاث مصفوفات

$$A+B = B+A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

لتكن k و k' عددين حقيقيين:

$$k(A+B) = k \cdot A + kB$$

$$(k+k')A = kA + k'A$$

$$(kk')A = k(k'A).$$

ضرب المصفوفات

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة ذات البعد $n\times p$ وعناصرها a_{ij}

و $B=(b_{ij})$ مصفوفة ذات البعد $p\times q$ وعناصرها b_{ij}

ناتج ضرب المصفوفة A بالمصفوفة B. هو المصفوفة $C=(c_{ij})$ المصفوفة ذات العناصر c_{ij} وعدد أسطرها n وعدد أعمدتها q حيث:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \cdots a_{ip}b_{pj}$$

مثال 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\times B = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 1 & 1\times 0 + 1\times 3 \\ 2\times 2 + 1\times 1 & 2\times 0 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 0\times 2 \\ 3\times 2 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ملاحظة

* حتى يكون الضرب محققا يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية

أي حتى يكون $A\times B$ موجود يجب أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B .

خصائص:

لتكن A ، B و C ثلاث مصفوفات مربعة ذات نفس البعد

* $A\times(B+C) = AB + A\times C$
* $(A+B)\times C = A\times C + B\times C$
* $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$

$A\times B \neq B\times A$.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$A\times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه $A\times B \neq B\times A$.

تعريف المصفوفة المعاكسة

المصفوفة A المربعة ذات البعد n هي مصفوفة قابلة للعكس فقط إذا وفقط إذا كان:

توجد مصفوفة B بحيث:

$$A\times B = B\times A = I_n$$

حيث I_n هي مصفوفة الوحدة ذات البعد n

نسمي المصفوفة B بالمصفوفة المعاكسة للمصفوفة A ونرمز لها بـ: A^{-1}

$\boxed{\text{حل جملة معادلات خطية}}$

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية:

$$(I)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

حيث المجاهيل هي x_1 و x_2 و x_3

لو نضع :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ و

فإن جملة المعادلات (I)

تكافئ الكتابة

$$A.X = B$$

النظرية التالية ستمكننا من حل جملة المعادلات (I) باستعمال المصفوفات .

نظرية :

لتكن A مصفوفة قابلة للعكس .

جملة المعادلات $Ax = B$

تقبل حلا وحيدا من الشكل

$$X = A^{-1}B$$

تمرين (مهم جدا) .

لتكن جملة المعادلات :

$$\text{II} \quad \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$$

① حول جملة المعادلات إلى الكتابة المصفوفية .

② لتكن $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

و $C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

~~أحسب~~ :

أحسب $A \times C$ و $C \times A$

ماذا تستنتج .

③ إستنتج حل جملة المعادلات (II)

الحل :

① نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

و $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

و $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه جملة المعادلات (I)

تكافئ الكتابة :

$$Ax = B$$

② حساب $A\times C$ و $C\times A$

$$A\times C = \begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\times7+4\times(-5) & (-4)\times3+4\times3\\ 5\times7+(-5)\times7 & (-4)\times5+7\times3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$C\times A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ومنه $A\times C = C\times A = I_2$

ومنه C هي المصفوفة العكسية لـ A .

③ الحل:

$$X = A^{-1}B = C\times B$$

ومنه

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}7\times1+(-4)\times2\\(-5)\times1+3\times2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

ومنه حلول جملة المعادلات هي:

$x=-1$ و

$y=1$