القسم I

دروس سنة أولى رياضيات تسيير التقنيات الحضرية

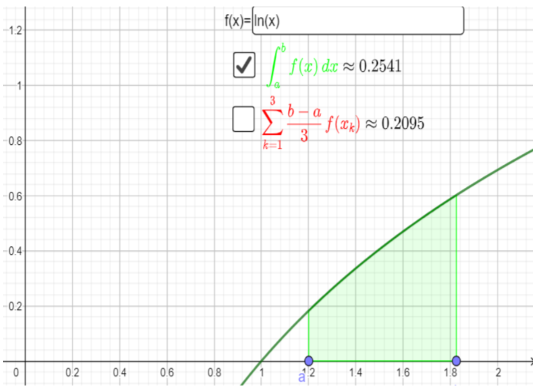
0.1 الحساب التكاملي

0.1.1 مقدمة

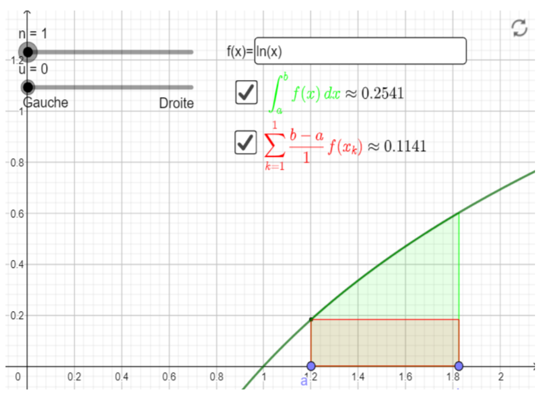
يعتبر الحساب التكاملي أداة فعالة في الرياضيات وباقي الفروع العلمية إذ يسمح في الكثير من الحالات بالحصول على نتائج هامة تتعلق بحساب الأطوال والمساحات والحجوم وقيم أخرى ذات طابع فيزيائي أو إقتصادي ... إلخ ، والملاحظ إن مسائل حساب المساحات ليست وليدة هذا العصر بل يعود طرحها إلى العصور القديمة . أما الحساب التكاملي بمفهومه الحديث فهو من إنتاج القرون الأخيرة بدءا من القرن السابع عشر إلى يومنا هذا .

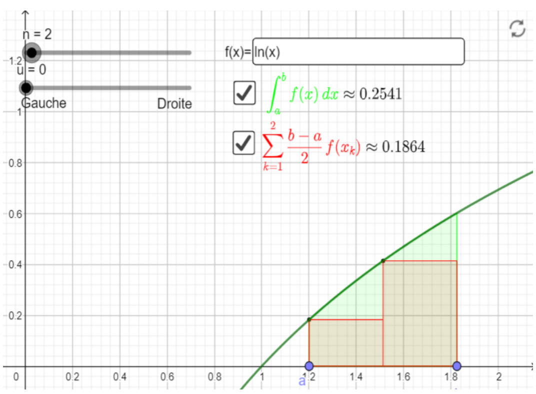
0.1.2 تكامل ريمان

يمكن من الناحية العملية تقديم تكامل ريمان على أنه ينطلق من الحاجة إلى التعبير عن المساحة الملونة بالأخضر أدناه والتي يمكن تسميتها على أنها تكامل الدالة f على المجال $[a;b]$:

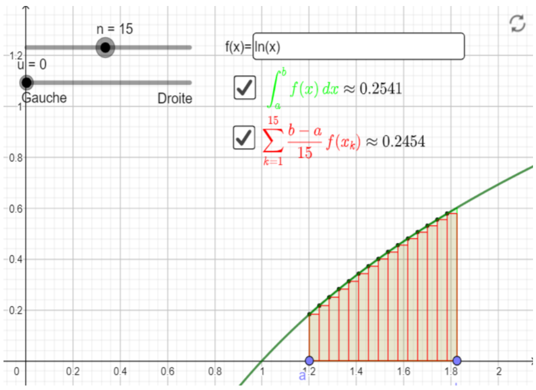


لكن التعريف الدقيق والرياضي لهذا التكامل أو الصيغة الرياضية التي يمكننا بها التعبير عن هذه المساحة يتطلب منا الإنطلاق من فكرة بسيطة ومحاولة العمل عليها حتى نصل إلى التعريف النهائي .
في الحالة العامة عندما تكون المساحة منتظمة كمساحة مستطيل مثلا أو مربع أو الدائرة فنحن نعلم القوانين الرياضية التي تمكننا من حساب هذه المساحات لكن الإشكال في مثالنا أن المساحة ليست منتظمة .
يمكننا إستغلال معرفتنا بكيفية حساب مساحة مستطيل وسهولتها و نحاول تغطية المساحة في الصورة بمساحة مستطيلات تكون أسفل منحنى الدالة كما يلي :

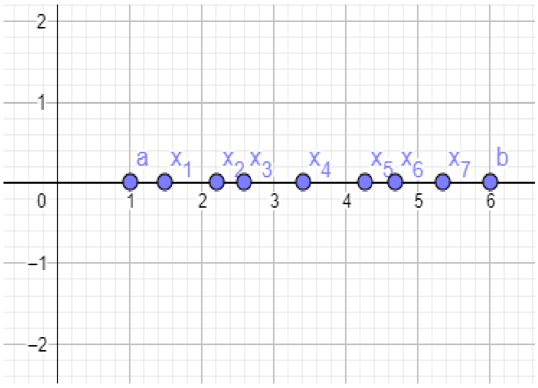




يمكننا الملاحظة أن أنه عندما استعملنا مستطيلين كانت مساحة التغطية أكثر قربا من المساحة التي أردنا حسابها لو نختار مثلا عدد أكبر من المستطيلات ماذا سيحصل ؟



نلاحظ أن مساحة المستطيلات تقترب أكثر من المساحة التي أردنا حسابها يعني لو نستعمل عدد كبير بما يكفي من المستطيلات سنقترب أكثر فأكثر من مساحتنا لكن كيف يمكننا التعبير عن ذلك رياضيا ؟ لتكن f دالة معرفة على المجال $[a;b]$ (لاحظ أنه لم نعطي أي خاصية للدالة f) ، لو نقوم بتقسيم هذا المجال إلى n تقسيمة $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ (ليس شرطا أن تكون متساوية)

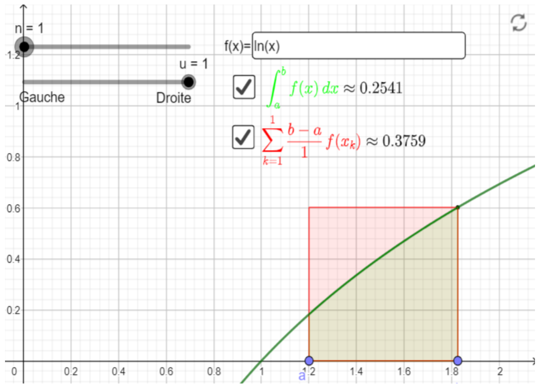


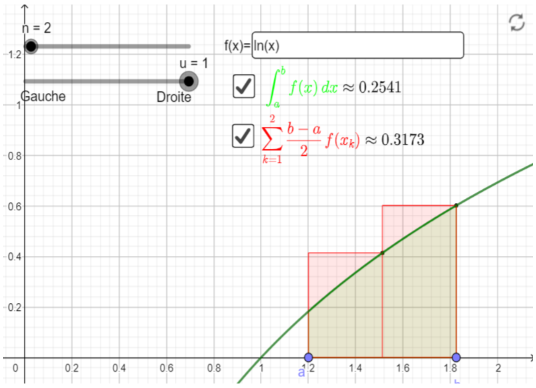
المثال في الصورة من أجل $n = 8$ ، عندئذ يكون عرض كل مستطيل من تلك المستطيلات هو $h_i = x_i - x_{i-1}$ ، لكن ماهو طول كل مستطيل من هذه المستطيلات ؟
بالملاحظة يمكننا معرفة أن طول كل مستطيل هو أصغر قيمة تبلغها الدالة في المجال $[x_{i-1};x_i]$ ويمكن أن نرمز لهذه القيمة بـ $\inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$. إذن مساحة كل مستطيل من تلك المستطيلات هي الطول في العرض أي : $S_i = h_i \times \inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$ ، ومساحة كل تلك المستطيلات معا هو مجموع مساحاتها أي نحصل في الأخير على :

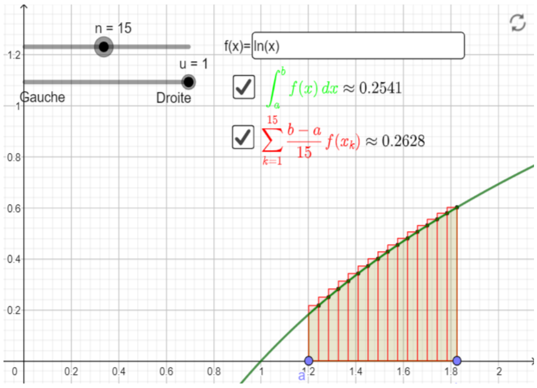
$$S_n^- = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \times \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \times \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

وكما لاحظنا سابقا كلما كان عدد المستطيلات أكثر كلما كانت مساحة تغطيتنا أقرب للمساحة المراد حسابها ، يمكننا التعبير عن هذا الكلام بجعل n تؤول إلى المالانهاية لكن هل يضمن ذلك تقارب المتتالية S_n^- ؟

بنفس الطريقة يمكننا تغطية مساحتنا بمستطيلات علوية أي تكون مساحتنا محتواة في مساحة تلك المستطيلات كما هو موضح في الشكل :







لن تختلف كثيرا صياغتنا للتغطية العلوية بالمستطيلات عن التغطية السابقة فقط سيتغير طول المستطيل والذي سيكون هذه المرة هو أكبر قيمة تبلغها الدالة في المجال $[x_{i-1};x_i]$ ويمكن أن نرمز لهذه القيمة بـ $\sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$. بنفس الطريقة السابقة نجد أن مساحة كل المستطيلات العلوية كما يلي :

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \times \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \times \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

كما نلاحظ في الصور كلما كان عدد المستطيلات أكثر كانت مساحة تغطيتنا العلوية أقرب أيضا للمساحة المراد حسابها ، يمكننا التعبير عن هذا الكلام بجعل n تؤول إلى اللانهاية لكن هل يضمن ذلك تقارب المتتالية S_n^+ ؟

تعريف 1. لتكن $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ دالة محدودة ، نضع :

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \times \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

$$S_n^- = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \times \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

يسمى S_n^+ و S_n^- مجموعي داربو العلوي والسفلي للدالة f .

تعريف 2. لتكن $f:[a;b]\mapsto\mathbb{R}$ دالة محدودة ، نقول عن f أنها قابلة للمكاملة وفق ريمان على المجال $[a;b]$ إذا كان :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n^+ = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n^- = l$$

ونسمي هذه النهاية بتكامل ريمان للدالة f على المجال $[a;b]$ ونكتب :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n^+ = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n^-$$

ملاحظات 1. من الناحية العملية في حساب مجاميع داربو يمكننا تبسيطها كما يلي :

1. إختيار تقسيمات متساوية للمجال $[a;b]$ أي عرض كل المستطيلات يكون متساوي أي نضع : $h_i=h=\dfrac{b-a}{n}$ ومنه نتحصل على : $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ و بالتراجع نجد : $x_i=a+i\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$
بالتعويض في مجاميع داربو نجد :

$$S_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \quad , \quad S_n^+ = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

2. يمكننا الملاحظة أيضا أن :

- في حالة الدالة متزايدة على المجال $[a;b]$ نتحصل على :

$$\inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) \quad , \quad \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) = f(x_i)$$

أي يمكننا كتابة مجاميع داربو كما يلي :

$$S_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \quad , \quad S_n^+ = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

- في حالة الدالة متناقصة على المجال $[a;b]$ نتحصل على :

$$\inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) = f(x_i) \quad , \quad \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$$

أي يمكننا كتابة مجاميع داربو كما يلي :

$$S_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad , \quad S_n^+ = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

3. في الأخير يمكننا إختصار الملاحظة 1 و 2 كما يلي :

- في حالة الدالة متزايدة على المجال $[a;b]$ تكتب مجاميع داربو كما يلي :

$$, \quad S_n^+ = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$S_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

- في حالة الدالة متناقصة على المجال $[a;b]$ تكتب مجاميع داربو كما يلي :

$$S_n^+ = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(i-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \quad ,$$
$$S_n^- = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

نظرية 1. كل دالة $f:[a;b]\mapsto\mathbb{R}$ رتيبة تقبل التكامل وفق ريمان

برهان. قدمت البرهان في حصة الدرس لم أرد ذكره هنا لأنكم غير مطالبين بالبرهان □

مثال 1. الدوال e^x ، $3x$ ، x^3 قابلة للتكامل وفق ريمان على $[0;1]$ لأنها رتيبة على هذا المجال .

نظرية 2. كل دالة $f:[a;b]\mapsto\mathbb{R}$ مستمرة تقبل التكامل وفق ريمان

ملاحظات 2. للبرهان أن لدالة قابلة للتكامل وفق ريمان على المجال $[a;b]$ يمكنك إستعمال أحد الطرق الثلاثة التالية :

- إثبات أن :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n^+ = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n^- = l$$

ويسمى بالبرهان بالتعريف (أي عندما يطلب منك البرهان بالتعريف على أن الدالة قابلة للمكاملة تستعمل هذه الطريقة)

- إثبات أن الدالة رتيبة على المجال $[a;b]$ (أي متزايدة تماما أو متناقصة تماما)

- أثبات أن الدالة مستمرة على المجال $[a;b]$

مثال 2. الدوال $\ln(x)$ ، $cos(x)$، $sin(x)$ قابلة للتكامل وفق ريمان على أي مجال $[a;b]$ لأنها عبارة عن دوال مستمرة

خواص 1. نوجز في ما يلي بعض خواص تكامل ريمان (علما أننا نضع إتفاقا : $\int_a^a f(x)dx = 0$)

1. إدا كانت الدالة $f:[a;b]\mapsto\mathbb{R}$ قابلة للتكامل فإنها تقبل التكامل على كل مجال جزئي من $[a;b]$

2. علاقة شال : إذا كانت الدالة $f:[a;b]\mapsto\mathbb{R}$ قابلة للتكامل وكان $c\in[a;b]$ فإن f يقبل التكامل على كل من المجالين $[a;c]$ و $[c;b]$ ولدينا :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

يمكن تعميم هذه النتيجة إلى أكثر من نقطة c ، ولدينا أيضا :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. إذا كانت الدالتين f و g قابلتين للتكامل على $[a;b]$ من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

4. إذا كانت الدالة f و g قابلتين للتكامل على $[a;b]$ فإنه لدينا الإستلزامات التالية :

- إذا كان $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in [a;b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كان $f(x) \geq g(x)$ من أجل كل $x \in [a;b]$ فإن : $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$
- لما كان $f \leq |f|$ فإن هذه الخاصية تستلزم دوما :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

0.2 الدوال الأصلية

تعريف 3. لتكن الدالة $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ ، تسمى كل دالة $F : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق من أجل كل $x \in [a;b]$ وتحقق المعادلة التالية :

$$\forall x \in \,]a;b[\qquad F'(x) = f(x)$$

بالدالة الأصلية للدالة f ، ونرمز لها بـ $\int f(x)dx$.

ملاحظات 3. .

- كل دالة أصلية هي دالة مستمرة لأنه من تعريفنا هي دالة قابلة للإشتقاق
- يمكن أن تكون الدالة غير مستمرة لكنها تملك دالة أصلية مستمرة مثال : الدالة $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ الغير مستمرة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 2\,, \; x > 0 \\ 0\,, \; x \leq 0 \end{cases}$$

تقبل دالة أصلية تكتب من الشكل :

$$F(x) = \begin{cases} 2x\,, \; x > 0 \\ 0\,, \; x \leq 0 \end{cases}$$

نظرية 3. إذا كانت الدالة $f : I \mapsto \mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية على المجال I فإن f تقبل عدد غير منته من الدوال الأصلية على المجال I تكتب من الشكل :

$$\int f(x)dx = F(x) + \lambda$$

بحيث λ عدد حقيقي .

نظرية 4. لتكن الدالة $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ قابلة للتكامل وفق ريمان ، و F الدالة المعرفة على $[a;b]$ بـ :

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

1. الدالة F مستمرة على المجال $[a;b]$
2. اذا كانت الدالة f مستمرة من أجل كل $x \in [a;b]$ كانت الدالة F قابلة للإشتقاق من أجل كل $x \in [a;b]$ ودالتها المشتقة تحقق : $F'(x) = f(x)$

ملاحظة 1. .

- اذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ ، فإن الدوال G المعرفة على المجال $[a;b]$ بـ :

$$G(x) = \int_c^x f(x)dx$$

هي دوال أصلية للدالة f من أجل كل $c \in [a;b]$.

- إذا كانت F دالة أصلية لـ f على المجال $[a;b]$ فذلك لا يعني أن f قابلة للمكاملة على $[a;b]$.

نظرية 5. لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ ، و F دالة أصلية لها لدينا عندئذ :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

الدوال الأصلية المتداولة

الدالة f	الدوال الأصلية F	مجال التعريف I للدالة f ولدوالها الأصلية F
0	λ ؛ ثابتة	$\mathbb{R}$
1	$x+\lambda$	$\mathbb{R}$
a ؛ ثابتة غير منعدمة	$ax+\lambda$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad ; \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\lambda$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad ; \quad n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\lambda$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$
$x^r \quad ; \quad r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+\lambda$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}+\lambda$	$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+\lambda$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\dfrac{1}{u(x)}+\lambda$	> مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: u قابلة للاشتقاق في x و $u(x)>0$ > مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: u قابلة للاشتقاق في x و $u(x)<0$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث : u قابلة للاشتقاق في x و $u(x)>0$
$u'(x)u^r(x) \quad ; \quad r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$	$\dfrac{u^{r+1}(x)}{r+1}+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقيةx بحيث: u قابلة للاشتقاق في x و $u(x)>0$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+\lambda$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$
$1+\text{cotan}^2(x)=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\text{cotan}(x)+\lambda$	$]k\pi,\pi+k\pi[\quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$
$\sin(ax+b) \quad ; \quad a\neq 0$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b) \quad ; \quad a\neq 0$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\times\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))+\lambda$	$D_{u'}:u'$ مجموعة تعريف
$u'(x)\times\cos(u(x))$	$\sin(u(x))+\lambda$	$D_{u'}:u'$ مجموعة تعريف
$u'(x).\left[1+\tan^2(u(x))\right]=\dfrac{u'(x)}{(\cos(u(x)))^2}$	$\tan(u(x))+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: u قابلة للاشتقاق في x و $u(x)\in\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$

$u'(x).\left[1+\cot an^2(u(x))\right]=\frac{u'(x)}{(\sin(u(x)))^2}$	$\cot an(u(x))+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: u قابلة للاشتقاق في x و $u(x)\in]k\pi,\pi+k\pi[\;\;;\;\; k\in Z$
$u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$	$u(x).v(x)+\lambda$	$D_{u'}\bigcap D_{v'}$
$\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)}+\lambda$	> مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: $v(x)>0$ و $x\in D_{u'}\bigcap D_{v'}$ أو > مجموعة الأعداد الحقيقيةx بحيث: $v(x)<0$ و $x\in D_{u'}\bigcap D_{v'}$
$u'(x).u(x)$	$\frac{(u(x))^2}{2}+\lambda$	$D_{u'}:u'$ مجموعة تعريف
$u'(x).u^2(x)$	$\frac{(u(x))^3}{3}+\lambda$	$D_{u'}:u'$ مجموعة تعريف
$v'(u(x)).u'(x)$	$(vou)(x)+\lambda=v(u(x))+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: $x\in D_{vou}\,;x\in D_{u'};u(x)\in D_{v'}$
$\frac{1}{u'(u^{-1}(x))}$	$u^{-1}(x)+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقيةx بحيث: $x\in D_{u^{-1}};u^{-1}(x)\in D_{u'}$ $u'(u^{-1}(x))>0$ أو $x\in D_{u^{-1}};u^{-1}(x)\in D_{u'}$ $u'(u^{-1}(x))<0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arc\tan(x)+\lambda$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$Arc\tan(u(x))+\lambda$	$D_{u'}:u'$ مجموعة تعريف
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$Arc\sin(x)+\lambda$	$]-1,1[$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ *	$Arc\sin(u(x))+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: $x\in D_{u'}\bigcap\{x\in IR\,/\,\lvert x\rvert<1\}$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$Arc\cos(x)+\lambda$	$]-1,1[$
$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ *	$Arc\cos(u(x))+\lambda$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث: $x\in D_{u'}\bigcap\{x\in\mathbb{R}\,/\,\lvert x\rvert<1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+\lambda=Log(x)+\lambda$	$]0,+\infty[$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))+\lambda$	$D_{u'}\bigcap\{x\in\mathbb{R}\,/\,u(x)>0\}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)+\lambda$	$D_{u'}\bigcap\{x\in\mathbb{R}\,/\,u(x)>0\}$ $D_{u'}\bigcap\{x\in\mathbb{R}\,/\,u(x)<0\}$ أو
e^x	$e^x+\lambda$	$\mathbb{R}$
e^{-x}	$-e^{-x}+\lambda$	$\mathbb{R}$
$e^{ax} \;\;;\;\; a\neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}+\lambda$	$\mathbb{R}$
$u'(x).e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+\lambda$	$D_{u'}:u'$ مجموعة تعريف

0.2.1 طريقة تبديل المتغير

نظرية 6. لتكن $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ دالة مستمرة و $\phi:[\alpha,\beta]\mapsto[a,b]$ دالة قابلة للإشتقاق ودالتها المشتقة مستمرة . لدينا عندئذ :

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)dt=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx$$

ملاحظة 2. • عند حساب الدوال الأصلية (أي بدون حدود للتكامل) وعند القيام بتغيير المتغير مثلا $t=\phi(x)$ فإن الدالة الأصلية المتحصل عليها ستكون بدلالة t لذلك وجب علينا تعويض t بـ $\phi(x)$ حتى نتحصل على الدالة الأصلية بدلالة x أنظر المثال الأول .

أمثلة 1. طريقة عملية

- للحصول على الدوال الأصلية للدالة $f(x)=\tan x$ نستعين بالتغيير $t=\cos x$ ، وعليه : $dt=-\sin x dx$ إذن :

$$\int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{t}dt=-\log|t|+C=-\log|\cos x|+C$$

- لحساب التكامل

$$I=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

نلجأ للتغيير $x=\tan t$ وعليه : $dx=1+\tan^2(x)dt$ إذن :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2)\,t\sqrt{1+\tan^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}dt$$

نحن نعلم أن $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ ومنه :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- إليك التكاملين التاليين :

$$J=\int_a^b\frac{(\log x)^n}{x}\qquad\qquad I=\int a^x dx$$

يترك حساب هاذين التكاملين للطالب يكفي في التكامل I ملاحظة أن $a^x=e^{x\log a}$ و وضع تغيير المتغير $t=x\log a$ وفي التكامل J يكفي وضع تغيير المتغير $t=\log x$.

0.2.2 طريقة التكامل بالتجزئة

نظرية 7. لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق ودالتيهما المشتقة مستمرة على $]a,b[$. يكون لدينا عندئذ :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ملاحظات 4. .

- الرمز $[u(x)v(x)]_a^b$ هو إختصار للكتابة $u(b)v(b)-u(a)v(a)$ أي أن :

$$[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b)-u(a)v(a)$$

- لحساب الدالة الأصلية (أي بدون حدود التكامل) التكامل بالتجزئة يكتب كما يلي :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \qquad (1)$$

أمثلة 2. طريقة عملية

- لحساب الدالة الأصلية لـ $f(x)=xe^x$ باستعمال التكامل بالتجزئة نضع : $u(x)=x$ و $v'(x)=e^x$ أي أن : $u'(x)=1$ و $v(x)=e^x$ بالتعويض في المعادلة 1 نجد :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\times e^x dx = xe^x - e^x + C$$

- لحساب الدالة الأصلية لـ $f(x)=\arctan x$ باستعمال التكامل بالتجزئة نضع : $u(x)=\arctan x$ و $v'(x)=1$ أي أن : $u'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ و $v(x)=x$ بالتعويض في المعادلة 1 نجد :

$$\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

0.2.3 الدوال الأصلية لبعض الدوال الناطقة

سندرس في هذا الباب طريقة عملية لحساب الدوال الأصلية لنوعين من الدوال الناطقة المتمثلين في:

- النوع الأول : $\dfrac{P(x)}{ax+b}$
- النوع الثاني : $\dfrac{P(x)}{ax^2+bx+c}$

بحيث : $P(x)$ عبارة عن كثير حدود من الدرجة n و b,a و c أعداد حقيقية .

النوع الأول

الحالة 1 إذا كان $n \geq 1$ نقوم بالقسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على : $ax+b$ نتحصل على :

$$P(x) = Q(x)(ax+b) + r$$

بحيث Q كثيرا حدود من الدرجة $n-1$ أي يمكننا كتابة :

$$\int \frac{P(x)}{ax+b}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{r}{ax+b}dx$$

بالنسبة للتكامل الأول لدينا :

$$\begin{aligned}
\int Q(x)dx &= \int a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...a_1x + a_0dx \\
&= a_{n-1}\int x^{n-1}dx + a_{n-2}\int x^{n-2}dx + ...a_1\int xdx + a_0\int 1dx \\
&= a_{n-1}\frac{x^n}{n} + a_{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x + C_1
\end{aligned}$$

أما بالنسبة للتكامل الثاني فنحاول كتابته على الشكل : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ ومنه :

$$\begin{aligned}
\int \frac{r}{ax+b}dx &= \frac{r}{a}\int \frac{\frac{a}{r}r}{ax+b}dx \\
&= \frac{r}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx \\
&= \frac{r}{a}\log|ax+b| + C_2
\end{aligned}$$

أي تحصلنا في الأخير على :

$$\int \frac{P(x)}{ax+b}dx = a_{n-1}\frac{x^n}{n} + a_{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x + \frac{r}{a}\log|ax+b| + C$$

بحيث $C = C_1 + C_2$

الحالة 2 إذا كان $n = 0$ أي التكامل يكون من الشكل : $\int \frac{r}{ax+b}dx$ والذي قمنا بحسابه ضمنيا في الحالة الأولى

أمثلة 3. لحساب الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{2x+1}$ نتبع الطريقة الموضحة في الأعلى بحيث : $P(x) = 2x^2+3x+1$ ، بما أن $n = 2 \geq 1$ نقوم بالقسمة الإقليدية لـ $2x^2+3x+2$ على : $2x+1$ نتحصل على :

$$2x^2 + 3x + 2 = (x+1)(2x+1) + 1$$

ومنه :

$$\int \frac{2x^2+3x+1}{2x+1} = \int x+1dx + \int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}dx = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\log|2x+1|+C$$

تمرين 1. أحسب التكاملات التالية :

$$I_3=\int\frac{5x^2+4x+1}{2x+4}dx \qquad I_2=\int\frac{x^3+2x^2+4}{x+3}dx \qquad I_1=\int\frac{x^4+x^3+2x}{3x+2}dx$$

النوع الثاني

المرحلة 1 إذا كان $n\geq 2$ نقوم بالقسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على : ax^2+bx+c نتحصل على :

$$P(x)=Q(x)(ax^2+bx+c)+R(x)$$

حيث Q كثير حدود من الدرجة $n-2$ و R كثيرا حدود ذو درجة أقل أو يساوي 1 أي يكتب بالشكل : $R(x)=dx+k$ بحيث d و k أعداد حقيقية ، أي يمكننا كتابة :

$$\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx=\int Q(x)dx+\int\frac{dx+k}{ax^2+bx+c}dx$$

بالنسبة للتكامل الأول هو تكامل دالة كثير حدود وقد قمنا بتبيان كيفية حسابه سابقا ، لم يتبقى إلا حساب التكامل من الشكل :

$$\int\frac{dx+k}{ax^2+bx+c}dx$$

ملاحظة 3. إذا كان $n\leq 1$ ننتقل مباشرة للمرحلة 2

المرحلة 2 حساب التكامل من الشكل :

$$\int\frac{dx+k}{ax^2+bx+c}dx$$

نحاول كتابة هذا التكامل على الشكل : $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ كما يلي :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx+k}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{d}{a}\int\frac{\frac{a}{d}(dx+k)}{ax^2+bx+c}dx\\ &= \frac{d}{a}\int\frac{ax+h}{ax^2+bx+c}dx\end{aligned}$$

بحيث $h=\frac{ka}{d}$ ومنه :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx+k}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{d}{a}\int\frac{ax+b-b+h}{ax^2+bx+c}dx\\ &= \frac{d}{a}\int\frac{ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{d}{a}\int\frac{h-b}{ax^2+bx+c}dx\\ &= \frac{d}{a}\log\left|ax^2+bx+c\right|+\frac{d}{a}\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx\end{aligned}$$

بحيث $A=h-b=\frac{ka}{d}-b$ ، إذن لم يبقى لنا إلا حساب التكامل من النوع :

$$I=\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx$$

لحساب تكامل من هذا النوع نحسب المميز الخاص بالمقام ونميز ثلاث حالات : $\Delta>0$ ، $\Delta=0$ و $\Delta<0$

- $\underline{\Delta>0}$ في هذه الحالة يمكننا كتابة $ax^2+bx+c=a(x-x_0)(x-x_1)$ ومنه نتحصل على :

$$\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{A}{a(x-x_0)(x-x_1)}dx=\frac{A}{a}\int\frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)}dx$$

يمكننا إيجاد أعداد حقيقة A_0 و A_1 بحيث :

$$\frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)}=\frac{A_0}{(x-x_0)}+\frac{A_1}{(x-x_1)}$$

ومنه :

$$\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{a}\int\frac{A_0}{(x-x_0)}dx+\frac{A}{a}\int\frac{A_1}{(x-x_1)}dx$$

ومنه :

$$\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx=\frac{AA_0}{a}\log|x-x_0|+\frac{AA_1}{a}\log|x-x_1|+C$$

ملاحظة 4. لإيجاد العددين A_0 و A_1 يكفي استعمال المطابقة أنظر الأمثلة

- $\underline{\Delta=0}$ في هذه الحالة يمكننا كتابة $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ ومنه :

$$I=\int\frac{A}{a(x-x_0)^2}dx=-\frac{A}{a}\int\frac{-1}{(x-x_0)^2}dx=\frac{-\frac{A}{a}}{x-x_0}+C$$

- $\underline{\Delta<0}$ في هذه الحالة نستعمل الشكل المميز لكثير الحدود الموجود في البسط ونتحصل على :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]=a\left[(x+h)^2+k^2\right]$$

بحيث : $h=\frac{b}{2a}$ و $k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ومنه :

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{A}{a\left[(x+h)^2+k^2\right]}dx\\
&= \frac{A}{a}\int\frac{1}{(x+h)^2+k^2}dx\\
&= \frac{A}{ak}\int\frac{\frac{1}{k}}{\left(\frac{x+h}{k}\right)^2+1}dx\\
&= \frac{A}{ak}\arctan\left(\frac{x+h}{k}\right)+C
\end{aligned}$$

أمثلة 4. حساب الدالة الأصلية للدالة $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2-3x+2}$
نلاحظ أن درجة كثير الحدود في البسط أكبر من درجة كثير الحدود الذي في المقام وبالتالي نقوم بالقسمة الإقليدية نجد :

$$2x^3+3x^2+1=(x^2+3x+2)(2x-3)+5x+7$$

ومنه :

$$\begin{aligned} I=\int \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2+3x+2}dx &= \int 2x-3dx+\int \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx \\ &= x^2-3x+\int \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx \end{aligned}$$

لم يبقى لنا الا حساب التكامل

$$I_1=\int \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$$

نحاول كتابة التكامل I_1 على الشكل $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$ كما يلي :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{5}{2}\int \frac{\frac{2}{5}(5x+7)}{x^2+3x+2}dx \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{14}{5}}{x^2+3x+2}dx \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{14}{5}-3+3}{x^2+3x+2}dx \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{2x-3}{x^2+3x+2}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx \\ &= \frac{5}{2}\log|x^2+3x+2|-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx \end{aligned}$$

لم يبقى لنا إلا حساب التكامل :

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

نلاحظ أن $\Delta=1>0$ ومنه : $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ أي أن :

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$

ومنه يمكننا إيجاد عددين حقيقين A_0 و A_1 بحيث :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx &= \int \frac{A_0}{(x+1)}dx + \int \frac{A_1}{(x+2)}dx \\
&= \int \frac{A_0(x+1)+A_1(x+2)}{(x+1)(x+2)}dx \\
&= \int \frac{(A_0+A_1)x+2A_0+A_1}{(x+1)(x+2)}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد : $A_0 = 1$ و $A_1 = -1$ ومنه :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx &= \int \frac{1}{(x+1)}dx + \int \frac{-1}{(x+2)}dx \\
&= \log|x+1| - \log|x+2| + C
\end{aligned}$$

ومنه تحصلنا في الأخير على :

$$I = \int \frac{2x^3+3x^2+1}{x^2+3x+2}dx = x^2 - 3x + \frac{5}{2}\log|x^2+3x+2| - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x+2| + C$$

- حساب الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$

نلاحظ أن درجة كثير الحدود الذي في البسط مساوية لدرجة كثير الحدود الذي في المقام وبالتالي نقوم بالقسمة الإقليدية نجد : $x^2+x+1 = x^2+2x+1-x$ ومنه :

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}dx &= \int 1dx + \int \frac{-x}{x^2+2x+1}dx \\
&= x - \int \frac{x}{x^2+2x+1}dx
\end{aligned}$$

لم يبقى لنا إلا حساب التكامل :

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+2x+1}dx$$

نحاول كتابة التكامل I_1 على الشكل $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ كما يلي :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+1| - \int \frac{1}{x^2+2x+1}dx
\end{aligned}$$

لم يبقى إلا حساب التكامل :

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx$$

نلاحظ أن : $\Delta = 0$ ومنه : $x^2+2x+1=(x+1)^2$ أي أن :

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1}+C$$

أي تحصلنا في الأخير على :

$$I = x - \frac{1}{2}\log|x^2+2x+1| - \frac{1}{x+1} + C$$

- حساب الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+4}$

نلاحظ أن درجة كثير الحدود الذي في البسط أقل من درجة كثير الحدود الذي في المقام لذلك نحسب مباشرة ، نحاول كتابة هذا التكامل على الشكل $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ كما يلي :

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{x}{x^2+2x+2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| - \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx
\end{aligned}$$

لم يبقى لنا إلا حساب التكامل

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

نلاحظ أن $\Delta = -4 < 0$ ومنه باستعمال الشكل المميز نجد : $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ أي أن :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \\
&= \arctan(x+1)+C
\end{aligned}$$

ومنه تحصلنا في الأخير على :

$$I = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| - \arctan(x+1) + C$$

0.2.4 الدوال الأصلية لبعض الدوال الجذرية

سندرس في هذا الباب طريقة عملية لحساب الدوال الأصلية لنوعين من الدوال الناطقة المتمثلة في :

- النوع الأول : $\sqrt{ax+b}$
- النوع الثاني : $\sqrt{ax^2+bx+c}$

بحيث a، b و c أعداد حقيقية

النوع الأول

نحاول كتابة هذا التكامل من الشكل $\int f'(x)f^s(x)dx$ بحيث s عدد حقيقي كما يلي :

$$\begin{aligned} I=\int \sqrt{ax+b}dx &= \int (ax+b)^{1/2}dx \\ &= \frac{1}{a}\int a(ax+b)^{1/2}dx \\ &= \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}+C \end{aligned}$$

مثال 3. حساب الدالة الأصلية للدالة $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$$\begin{aligned} I=\int \sqrt{2x+1}dx &= \int (2x+1)^{1/2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{1/2}dx \\ &= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}+C \end{aligned}$$

النوع الثاني

نميز ثلاث حالات :

- $\Delta=0$ و $a>0$
- $\Delta>0$ نميز حالتين : $a>0$ و $a<0$
- $\Delta<0$ (هذه الحالة لم أقم بإكمالها في الدرس لذلك لا تدخل)

الحالة 1 : $\Delta=0$ و $a>0$ في هذه الحالة يمكننا كتابة : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ ومنه :

$$\begin{aligned} I=\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx &= \int \sqrt{a(x-x_0)^2}dx \\ &= \int \sqrt{a}|x-x_0|dx \end{aligned}$$

منه :

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{cases} \sqrt{a}\int x-x_0dx & x \geq x_0 \\ \sqrt{a}\int -(x-x_0)dx & x < x_0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{2}(x-x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -\frac{\sqrt{a}}{2}(x-x_0)^2 & x < x_0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

الحالة 2 $\Delta > 0$ و $a > 0$ باستعمال الشكل المميز :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(x+h)^2-k^2\right]$$

بحيث : $h=\frac{b}{2a}$ و $k=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ومنه :

$$
\begin{aligned}
I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx &= \int \sqrt{a\left[(x+h)^2-k^2\right]}dx \\
&= \sqrt{a}\int \sqrt{(x+h)^2-k^2}dx \\
&= |k|\sqrt{a}\int \sqrt{\left(\frac{x+h}{k}\right)^2-1}dx
\end{aligned}
$$

نستعمل تغيير المتغير $\cosh t=\frac{x+h}{k}$ ومنه : $\sinh t dt = 1/kdx$ أي أن : $dx = k\sinh t dt$ ونعلم أن : $\sqrt{\cosh^2 t-1}=\sinh t$ ومنه بالتعويض في التكامل نجد :

$$
\begin{aligned}
I &= k|k|\sqrt{a}\int \sqrt{\cosh^2 t-1}\sinh t dt \\
&= k|k|\sqrt{a}\int \sinh^2 t dt
\end{aligned}
$$

ومن خواص الدوال الزائدة لدينا : $\sinh^2 t=\frac{\cosh 2t-1}{2}$ ومنه :

$$
\begin{aligned}
I &= k|k|\sqrt{a}\int \frac{\cosh 2t-1}{2}dt \\
&= k|k|\sqrt{a}\int \frac{\cosh 2t}{2}dt - k|k|\sqrt{a}\int \frac{1}{2}dt \\
&= \frac{k|k|\sqrt{a}}{4}\sinh 2t - \frac{k|k|\sqrt{a}}{2}t + C
\end{aligned}
$$

بحيث : $t=\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{x+h}{k}\right)$ أي أن :

$$I = \frac{k|k|\sqrt{a}}{4}\sinh\left(2\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{x+h}{k}\right)\right) - \frac{k|k|\sqrt{a}}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{x+h}{k}\right) + C$$

الحالة 2 $\Delta > 0$ و $a < 0$ باستعمال الشكل المميز :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=-a\left[k^2-(x+h)^2\right]$$

بحيث : $h=\dfrac{b}{2a}$ و $k=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ومنه :

$$\begin{aligned} I=\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx &= \int\sqrt{-a\left[k^2-(x+h)^2\right]}dx \\ &= \sqrt{-a}\int\sqrt{k^2-(x+h)^2}dx \\ &= |k|\sqrt{-a}\int\sqrt{1-\left(\frac{x+h}{k}\right)^2}dx \end{aligned}$$

نستعمل تغيير المتغير $\cos t=\dfrac{x+h}{k}$ ومنه : $-\sin t dt=1/k dx$ أي أن : $dx=-k\sin t dt$ ونعلم أن : $\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t$ ومنه بالتعويض في التكامل نجد :

$$\begin{aligned} I &= -k|k|\sqrt{-a}\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t dt \\ &= -k|k|\sqrt{-a}\int\sin^2 t dt \end{aligned}$$

ومن خواص الدوال المثلثية لدينا : $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$ ومنه :

$$\begin{aligned} I &= -k|k|\sqrt{-a}\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt \\ &= k|k|\sqrt{-a}\int\frac{\cos 2t}{2}dt-k|k|\sqrt{-a}\int\frac{1}{2}dt \\ &= \frac{k|k|\sqrt{-a}}{4}\sin 2t-\frac{k|k|\sqrt{-a}}{2}t+C \end{aligned}$$

بحيث : $t=\arccos\left(\dfrac{x+h}{k}\right)$ أي أن :

$$I=\frac{k|k|\sqrt{-a}}{4}\sin\left(2\arccos\left(\frac{x+h}{k}\right)\right)-\frac{k|k|\sqrt{-a}}{2}\arccos\left(\frac{x+h}{k}\right)+C$$

أمثلة 5. .

- حساب الدالة الأصلية للدالة $f(x)=\sqrt{2x^2+4x+2}$
  بالحساب نجد أن : $\Delta=0$ ومنه : $f(x)=\sqrt{2(x+1)^2}$ أي أن :

$$\begin{aligned} I=\int\sqrt{2x^2+4x+2}dx &= \int\sqrt{2(x+1)^2}dx \\ &= \sqrt{2}\int|x+1|dx \end{aligned}$$

ومنه :

$$I = \begin{cases} \sqrt{2}\int x+1dx & x\geq 1 \\ \sqrt{2}\int -(x+1)dx & x<1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)^2 & x\geq 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)^2 & x<1 \end{cases}$$

- حساب الدالة الأصلية للدالة : $f(x)=\sqrt{2x^2+3x+1}$ بالحساب نجد $\Delta=1>0$ ومنه نكتب كثير الحدود على الشكل المميز نجد $2x^2+3x+1=2\left[(x+\frac{3}{4})^2-(\frac{1}{4})^2\right]$ ومنه :

$$I=\int\sqrt{2x^2+3x+1}dx = \int\sqrt{2\left[(x+\frac{3}{4})^2-(\frac{1}{4})^2\right]}dx$$
$$= \sqrt{2}\int\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-(\frac{1}{4})^2}dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int\sqrt{(4x+3)^2-1}dx$$

نستعمل تغيير المتغير $\cosh t = 4x+3$ ومنه : $\sinh t dt = 4dx$ أي أن : $dx=\frac{1}{4}\sinh t dt$
ونعلم أن : $\sqrt{\cosh^2 t-1}=\sinh t$ ومنه بالتعويض في التكامل نجد :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{16}\int\sqrt{\cosh^2 t-1}\sinh t dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\int\sinh^2 t dt$$

ومن خواص الدوال الزائدة لدينا : $\sinh^2 t=\frac{\cosh 2t-1}{2}$ ومنه :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{\cosh 2t-1}{2}dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{\cosh 2t}{2}dt-\frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{1}{2}dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{64}\sinh 2t-\frac{\sqrt{2}}{32}t+C$$

بحيث : $t=\arg\cosh\left(\frac{x+h}{k}\right)$ أي أن :

$$I=\frac{\sqrt{2}}{64}\sinh(2\arg\cosh(4x+3))-\frac{\sqrt{2}}{32}\arg\cosh(4x+3)+C$$

- حساب الدالة الأصلية للدالة $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$ بالحساب نجد $\Delta = 1 > 0$ ومنه نكتب كثير الحدود على الشكل المميز نجد $-2x^2 - 3x - 1 = 2\left[(\frac{1}{4})^2 - (x + \frac{3}{4})^2\right]$ ومنه :

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{-2x^2 - 3x - 1}dx &= \int \sqrt{2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x + \frac{3}{4}\right)^2\right]}dx \\ &= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x + \frac{3}{4}\right)^2}dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \sqrt{1 - (4x+3)^2}dx \end{aligned}$$

نستعمل تغيير المتغير $\cos t = 4x + 3$ ومنه : $-\sin t dt = 4dx$ أي أن : $dx = -\frac{1}{4}\sin t dt$
ونعلم أن : $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$ ومنه بالتعويض في التكامل نجد :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\sqrt{2}}{16}\int \sqrt{1 - \cos^2 t}\sin t dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{16}\int \sin^2 t dt \end{aligned}$$

ومن خواص الدوال الزائدة لدينا : $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ ومنه :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{1 - \cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{\cos 2t}{2}dt - \frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{1}{2}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{64}\sin 2t - \frac{\sqrt{2}}{32}t + C \end{aligned}$$

بحيث : $t = \arccos(4x+3)$ أي أن :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{64}\sin(2\arg\cos(4x+3)) - \frac{\sqrt{2}}{32}\arg\cos(4x+3) + C$$

0.3 مدخل إلى المعادلات التفاضلية

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقة في كل فروع الرياضيات والهندسة والفيزياء ، حيث أغلب العلاقات والقوانين الرياضياتية والفيزيائية والهندسية تظهر على شكل معادلات تفاضلية . ولفهم هذه القوانين والعلاقات فلابد لنا من دراسة حلول المعادلات التفاضلية أي إيجاد حلول لها أو على الأقل معرفة خصائص هذه الحلول إن استعصى الحصول عليه .

تعريف 4. نسمي معادلة تفاضلية كل علاقة تربط بين الدالة ومشتقاتها والمتغير x

أمثلة 6.

$$\frac{dy}{dx}+y=3x^2 \tag{2}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}y+x^2\frac{dy}{dx}=0 \tag{3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\exp(y)=0 \tag{4}$$

ملاحظة 5. يمكننا التعبير عن المشتقات الخاصة بالدالة y كما يلي : $y'=\frac{dy}{dx}$ ، $y"=\frac{d^2y}{dx^2}$ وبصفة العامة المشتقة من الرتبة n كما يلي : $y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$

0.3.1 تصنيف المعادلات التفاضلية

يمكننا تصنيف المعادلات التفاضلية إلى ثلاث تصانيف رئيسية :

- التصنيف على أساس الرتبة
- التصنيف كخطية أو غير خطية
- التصنيف كمتجانسة أو غير متجانسة

تعريف 5. رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتق فيها

أمثلة 7. يمكننا تصنيف المعادلة (2) من الرتبة الأولى و (3) من الرتبة الثانية و (4) من الرتبة الثالثة .

تعريف 6. يقال أن المعالدلة التفاضلية خطية إذا كانت الدالة ومشتقاتها كمقادير من الدرجة الأولى أي لا يوجد فيها حدود من الشكل : $y^2,y^3,e^y...$ أو $yy',yy",y'y"....$ أو $(y')^2,(y")^2,e^{y'},e^{y"}....$
وعموما فإن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n تكتب دائما من الشكل :

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_1(x)y^{'}=f(x) \tag{5}$$

أمثلة 8. يمكننا تصنيف المعادلة (2)و (3) على أنها خطية و (4) على أنها غير خطية .

تعريف 7. يقال أن المعادلة التفاضلية متجانسة إذا كان لا يوجد بها حد (أو أكثر) يحتوي على المتغير المستقل فقط . أما إذا كان بها حد أو أكثر يحتوي على المستقل المتغير فقط فإن المعادلة تكون غير متجانسة .

أمثلة 9. يمكننا تصنيف المعادلة (2) على أنها غير متجانسة و (3) و (4) على أنها متجانسة ، أما المعادلة (5) فتكون متجانسة إذا كانت $f(x)=0$ وغير متجانسة إذا كانت $f(x)\neq0$.

0.3.2 حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

لتكن المعادلة $y' = 2$ يمكننا الملاحظة أن $y_0 = 2x$ ، $y_1 = 2x + 1$ ، $y_2 = 2x + 2$ كلها حلول لهذه المعادلة التفاضلية وهكذا يوجد عدد لا نهائي من الدوال كل منها يسمى حل خاص للمعادلة التفاضلية . يمكننا كتابة هذه الحلول على الشكل :

$$y = 2x + c$$

بحيث c عدد حقيقي ويسمى هذا الحل بالحل العام للمعادلة التفاضلية .

تعريف 8. الحل العام للمعادلة التفاضلية هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت مساوي لرتبة المعادلة

حل معادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

لحل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ يكفي المكاملة من الطرفين نجد : $y = \int f(x)dx$ وبالتالي تحصلنا على حل عام لهذه المعادلة التفاضلية .

مثال 4. لحل المعادلة التفاضلية $y' = 2x^2 + 3$ يكفي مكاملة طرفي المعادلة نجد :

$$y = \int 2x^2 + 3dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + c$$

حل معادلات تفاضلية من الشكل $a(x)y' + b(x)y = 0$

لحل معادلة تفاضلية من الشكل $a(x)y' + b(x)y = 0$ يمكننا كتابة المعادلة من الشكل :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

ومنه بمكاملة طرفي المعادلة نجد :

$$\log|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + c_1$$

حيث c_1 عدد حقيقي ، بادخال الدالة الأسية لطرفي المعادلة نجد :

$$y = \pm e^{c_1} \exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) = C \exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

حيث : $C = \pm e^{c_1}$

مثال 5. لحل المعادلة التفاضلية $xy' + x^2y = 0$ يمكننا كتابتها على الشكل :

$$\frac{y'}{y} = -x$$

بمكاملة طرفي المعادلة نجد :

$$\log|y| = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

ومنه :

$$y = C\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

بحيث : $C = \pm e^{c_1}$

حل معادلات تفاضلية من الشكل $a(x)y' + b(x)y = f(x)$

لحل معادلات تفاضلية من هذا النوع نستعمل طريقة إسمها تغيير الثابت . نفرض أن حل المعادلة من الشكل : $y = y_0 + y_p$ نعوض في المعادلة نجد :

$$(a(x)y_0' + b(x)y_0) + (a(x)y_p' + b(x)y_p - f(x)) = 0$$

حتى يكون y حل للمعادلة التفاضلية يكفي أن يتحقق :

$$a(x)y_0' + b(x)y_0 = 0 \tag{6}$$
$$a(x)y_p' + b(x)y_p = f(x) \tag{7}$$

المعادلة (6) من النوع الذي قمنا بحله سابقا أي حلها يكون من الشكل :

$$y_0 = C\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

أما بالنسبة للمعادلة (7) نقوم بحلها باستعمال تغيير الثابت وذلك بفرض أن :

$$y_p = C(x)\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) \tag{8}$$

نحاول إيجاد قيمة الدالة $C(x)$ حتى يكون y_p حلا للمعادلة (7) ، نحسب :

$$y_p' = C'(x)\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) - \frac{C(x)b(x)}{a(x)}\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) \tag{9}$$

بتعويض (8) و (9) في (7) نجد :

$$a(x)C'(x)\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) - C(x)b(x)\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) + C(x)b(x)\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) = f(x)$$

أي أن :

$$a(x)C'(x)\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right) = f(x)$$

ومنه :

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)}\exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)dx$$

مثال 6. (تطبيقي) لحل المعادلة التفاضلية من الشكل : $y'+y=e^x$ نفرض أن الحل يكتب من الشكل : $y=y_0+y_p$ بحيث :

$$y_0'+y_0=0 \tag{10}$$
$$y_p'+y_p=e^x \tag{11}$$

بالنسبة لحل المعادلة (10) نجد : $y_0'=-y_0$ ومنه : $\frac{y_0'}{y_0}=-1$ بالمكاملة نجد : $\log|y_0|=-x+c_1$ ومنه :

$$y_0=Ce^{-x}$$

أما بالنسبة لحل المعادلة (11) نستعمل طريقة تغيير الثابت نفرض أن :

$$y_p=C(x)e^{-x}$$

ونحاول إيجاد $C(x)$ حتى يكون y_p حل للمعادلة (11) نقوم بحساب :

$$y_p'=C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}$$

نقوم بتعويض كل من y_p و y_p' في (11) نجد :

$$C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}=x$$

ومنه:

$$C'(x)e^{-x}=e^x$$

أي أن :

$$C'(x)=e^{2x}$$

ومنه :

$$C(x)=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}$$

أي أن :

$$y_p=\frac{e^{2x}}{2}e^{-x}=\frac{e^x}{2}$$

نتحصل في الأخير على الحل العام :

$$y=y_0+y_p=Ce^{-x}+\frac{e^x}{2}$$