Ex03 : Trouver la relation entre les coefficients thermoélastiques α, β et χ, pour une mole de gaz parfait. Vérifier la relation mathématique ⊛ pour ce gaz.

Ex04 : Une mole de gaz de Van der Waals obéit à :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

1/ Exprimer, en fonction des variables indépendantes volume V et température absolue T, les coefficients de dilatation à pression constante α et d'augmentation de pression à volume constant β.

2/ Trouver la relation générale entre le coefficient de compressibilité isotherme χ et les coefficients α et β.

Rappel : $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_P$, $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dT}\right)_V$

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1 \quad ⊛$$

A. Chelghoum

A. Chelghoum

Exo 3 : L'équation d'état d'une mole de gaz parfait :

$$PV = RT$$

* Differentions cette équation à pression constante :

$$PdV + \cancel{Vdp}^{0} = RdT \Rightarrow PdV = RdT \Rightarrow \left.\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{R}{P} = \frac{V}{T}$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{1}{V}\cdot\frac{V}{T} = \frac{1}{T} \quad (1)$$

* Differentions l'équation d'état à volume constant :

$$\cancel{PdV}_{0} + Vdp = RdT \Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{R}{V} = \frac{P}{T}$$

$$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dT}\right)_V = \frac{1}{P}\cdot\frac{P}{T} = \frac{1}{T} \quad (2)$$

* Differentions l'équation d'état à température constante :

$$PdV + Vdp = R\cancel{dT}_{0} \Rightarrow \left.\frac{dV}{dp}\right)_T = -\frac{V}{P}$$

$$\chi = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dp}\right)_T = -\frac{1}{V}\left(-\frac{V}{P}\right) = \frac{1}{P} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_P \Rightarrow \left(\frac{dT}{dV}\right)_P = \frac{1}{\alpha V}$$

$$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dT}\right)_V \Rightarrow \left(\frac{dP}{dT}\right)_V = \beta P$$

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{dV}{dP}\right)_T = -\chi\cdot V$$

Remplaçons chaque quotient par son expression dans la relation mathématique (*)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1 \Leftrightarrow (-\chi V)(\beta P)\left(\frac{1}{\alpha V}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\chi = \frac{\alpha}{\beta P}}$$ c'est la relation générale entre α, β et χ.

(1), (2), (3) dans cette dernière relation :

$$\frac{1}{P} = \frac{1/\cancel{T}}{\frac{1}{\cancel{T}}\cdot P} \Rightarrow 1 = 1$$ donc, la relation est vérifiée pour ce gaz.

A. Chelghoum

EXO4 1°/ * Différentions l'équation d'état du gaz à pression constante : $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)dV - (V-b)\frac{2a}{V^3}dV = RdT$$

Or $\left(P+\frac{a}{V^2}\right) = \frac{RT}{V-b} \Rightarrow \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{(V-b)2a}{V^3}\right)dV = RdT$

$$\left.\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{RV^3(V-b)}{RTV^3 - 2a(V-b)^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{RV^2(V-b)}{RTV^3 - 2a(V-b)^2}}$$

* Différentions l'équation à volume constant :

$$dp\,(V-b) = RdT \Rightarrow \left.\frac{dp}{dT}\right)_V = \frac{R}{V-b}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{P}\cdot\frac{R}{V-b} = \frac{1}{\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}}\cdot\frac{R}{V-b}$$

$$\boxed{\beta = \frac{RV^2}{RTV^2 - a(V-b)}}$$

2°/ $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$. de la même manière que l'exo 1, on trouve : $\boxed{\chi = \frac{\alpha}{\beta P}}$

A. Chelghoum.