○ حل مقترح لسلسة تطبيقات نظرية الاحتمالات

- حل التطبيق (1-1) :

نجد أولا عدد طرق إجلاس الأشخاص الخمسة ومن ثم نطرح منه عدد الطرق التي يكون فيها الإثنان المعنيان بجانب بعضهم البعض .

- عدد طرق إجلاس الخمسة أشخاص هو : $5\,! = 120$

- عدد الطرق التي يكون فيها الإثنان بجانب بعضهم البعض :

* يتم النظر إلى الشخصين و كأنهما شخص واحد و بالتتالي صار لدينا 4 أشخاص :(4!)

* عدد طرق تبديل الشخصين فيما بينهما هو : (2!)

و منه فإن عدد الطرق التي يكون فيها الإثنان بجانب بعضهما البعض هو : $48 = (2!) . (4!)$.

إذا عدد طرق إجلاس الأشخاص الخمسة بحيث لا يتم إجلاس الشخصين المعنيين بجانب بعضهما البعض هو :

$$5! - (4!.2!) = 120 - 48 = 72$$

- **- حل تطبيق (2-1) :**

عدد الطرق يساوي 630 :

$$\frac{9!}{4!3!2!} = \frac{362880}{576} = 630$$

- **- حل تطبيق (3-1) :**

من خلال تطلعنا إلى الجملة نلاحظ أنها متكونة من 29 حرفا منهم : 7 حروف " أ " ، 3 حروف " **م**" ،5 حروف " ر" ، 2 حروف " **ي**" ، 2 حروف " **ل**"، 3 حروف " **ء** " ، 3 حروف "**ب**" ، 1 حرف " **ج** "، 1 حرف " **ف** "، 1 حرف " **خ** " .

و نلاحظ أن :

$$7+3+5+3+3+2+1+2+1 = 29$$

ومنه فإن عدد طرق التباديل يساوي :

$$\frac{29!}{7!3!5!2!3!3!2!1!} = \text{عدد طرق التباديل .}$$

- **- حل تطبيق (4-1) :**

نلاحظ هنا أن الترتيب مهم ، فالشخص الأول (و ليكن الرئيس) نستطيع أختياره من بين 12 شخص، أم الشخص الثاني و ليكن أمين الصندوق ، يمكن أختياره من بين 11 شخص بينما المقرر و هو أخر عنصر في اللجنة فيمكن أختياره بـ: 10 طرق من بين الشخاص الباقون . و منه فإن عدد اللجان الممكن هو : $12 \times 11 \times 10 = 1320$

أي :

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

- **- حل تطبيق (5-1) :**

نستطيع النظر إلى تكوين كلمة ثنائية على أنها تجربة تتمثل بسحب متتال بـ: $k = 2$ عناصر من مجتمع بحجم $n = 4$ ، و السحب بدون إعادة ، و بالتالي فعدد الكلمات الثنائية المختلفة الممكن تشكيلها من الحروف الأربعة هي :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2} = 12$$

- **- حل تطبيق (12-1) :**

- عدد أيام الأسبوع 7 ($n = 7$) ،
- عدد الأيام المفتوحة 5 ($k = 5$) ،

ومنه :

أ- عدد الترتيبات لخمس عناصر (مع الإعادة) مع التي تم إختيارها من بين 7 عناصر.

$$n^k = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 16807$$

بـ- عدد الترتيبات لخمس عناصر (دون إعادة) التي تم إختيارها من بين 7 عناصر.

$$A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

جـ-عدد الترتيبات لخمس عناصر (دون إعادة) التي تم إختيارها من بين 5 عناصر.

$$A_5^5 = P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

- **- حل تطبيق (7 -1) :**

عدد طرق تعبئة البطاقة هو :

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$$

- **- حل تطبيق (8-1)**

هناك 15 شخصا (15 = 3- 8 + 10) يقرؤون على الأقل أسبوعية من ضمنهم :

- 7 يقرؤون الأسبوعية A فقط
- 5 يقرؤون الأسبوعية B فقط
- 3 يقرؤون الأسبوعيتين A و B فقط .

أ - هناك 3003 مجموعة تقرأ على الأقل أسبوعية :

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5!10!} = 3003$$

ب - هناك 792 مجموعة تقرأ أسبوعية و احدة :

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = 792$$

جـ - هناك 22 مجموعة تقرأ أسبوعية واحدة و نفس الأسبوعية :

$$C_7^5 + C_5^5 =$$

د. -هناك 980 مجموعة بها 3 أشخاص يقرؤون الأسبوعية A والشخصان الأخران يقرأن الأسبوعية B:

$$C_7^3 \, . \, C_8^2 = 980$$

هـ - هناك 210 مجموعة بها 2 أشخاص يقرؤون الأسبوعيةA و الأشخاص الباقون (3) يقرؤون الأسبوعية B :

$$C_7^2 \, . \, C_5^3 = 210$$

و-هناك 7752 مجموعة بها 3 أشخاص من بين الأشخاص الـ: 5 يقرؤون على الأقل الأسبوعية A :

$$C_{10}^3 \, . \, C_{10}^2 + C_{10}^4 . C_{10}^1 + C_{10}^5 = 7752$$

-حل تطبيق (9– 1):

كل تصور يمثل توفيقة لـ100 جواب بتكرار من المرتبة 3. و عندها فإن عدد التوفيقات المقابلة هو :

$$C_{n+k-1}^{k} = K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$= C_{100-3-1}^{3} = C_{102}^{3} = \frac{102!}{3!99!} = \frac{102 \text{ x } 101 \text{ x}100}{3 \text{ x } 2 \text{ x}1} = 171700$$

- حل تطبيق (10 – 1)

إن العلاقة : $A_n^1 + A_n^3 = 9$

تكافؤ :

$$n \in N^+ \, , \, n + n(n-1)(n-2) = 9$$

وهذه العلاقة الأخيرة تكتب كما يلي :

$$n^3 - 3n^2 + 3n - 9 = 0$$

و بجمع العبارات 2 فـ 2 :

$$n^2 (n-3) + 3(n-3) = 0$$

ومنه :

$$(n^2 + 3)(n-3) = 0$$

و الذي لايقبل سوى الجذر التام :

$$\mathbf{n = 3}$$

- **-حل التطبيق (1-2):**

يتعلق الأمر بإيجاد النسبة بين عدد الملفات المنتمية إلى الصنف (A) , وهو 2900 عامل , و العدد الكلي للملفات , وهو 16000 و الذي يمثل فراغ إمكانات التجربة أو فضاء العينة كما رأينا سابقا , أي :

$$P(A) = \frac{2900}{16000} = 0{,}1813$$

و لنفرض أن السؤال السابق جاء كما يلي :

ماهو احتمال أن يكون عمر صاحب الملف أقل من 30 سنة علما أنه ملف إمرأة ؟

هنا نود أن نحسب نفس احتمال الحادث السابق (أ) , عمر صاحب الملف أقل من 30 سنة ,لكن مع العلم أن الحادث F محقق (الملف ملف إمرأة) . هذه المعلومة ستؤدي بنا إلى تقليص عدد الملفات (و بالتالي نكون بصدد فراغ جزئي(الإناث) من الفراغ الكلي عمال شركة " **رجزو** ").

وباعتماد صيغة الإحتمالات الشرطية ينتج لدينا ما يلي :

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{1700/16000}{8200/16000} = \frac{1700}{8200} = 0{,}2073$$

نلاحظ أن احتمال تحقق الحادث A علما أن الحادث F قد تحقق هو أكبر من احتمال تحقق الحادث A , أي :

$$P(A/F) > P(A)$$

وهذا منطقي لأن المعلومة مفيدة و ذات قيمة مما جعل إحتمال إصابتنا للهدف المنشود أكبر .

- **-حل التطبيق (2-2):**

لنرفض أن :

- B : يرمز لحادث كون الكرة بيضاء ،
- R- : يرمز لحادث كون الكرة حمراء .
- A- : يرمز لحادث سحب الكرة الأولى بيضاء
- C- : يرمز لحادث سحب الكرة الثانية و الثالثة حمراء .

عند الإنطلاق الصندوق به 8 كرات . السحب يتم دون إعادة هذا يعني أنه و بعد سحب كرة بيضاء من الصندوق يبقى في الصندوق 7 كرات 4 بيضاء (الكرات البيضاء نقصت بواحدة) و 3 حمراء (الكرات الحمراء لم يتغير عددها) و بالتالي إمكانية سحب كرتين حمراويين من الصندوق هو :

$$\boxed{}$$

لكن إذا اعتمدنا التحليل فإننا سنعبر الخطوات التالية :

- فراغ إمكانات التجربة منته و يتكون من 8 حوادث ممكنة وهي :

$$\Omega = \{(RRR),(RRB),(RBR),(BRR),(RBB),(BRB),(BBR),(BBB)\}$$

- فراغ إمكانات الحادث A هو كما يلي :

$$A = \{(BRR),(BRB),(BBR),(BBB)\}$$

- فراغ إمكانات الحادث C هو كما يلي :

$$C = \{(RRR),(BRR)\}$$

- وهذا يعني أن التقاطع يساوي :

$$A \cap C = \{(BRR)\}$$

و باعتماد قاعدة الإحتمالات في حال عدم إستقلالها نجد :

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$$

حيث أن :

$$P(A) = \left(\frac{5}{8} x \frac{3}{7} x \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{5}{8} x \frac{3}{7} x \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{5}{8} x \frac{4}{7} x \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{5}{8} x \frac{4}{7} x \frac{3}{6}\right) = \frac{210}{336}$$

ومنه :

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{30/336}{210/336} = \frac{30}{210} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

نلاحظ أنها نفس النتيجة التي وجدناها في السابق .

- **-حل تطبيق (3-2):**

نحن بصدد تجربة لها فراغ إمكانات منته و يتكون من 36 إمكانية ، هذا الفراغ هو :

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$$

ركزنا هنا على حالتين: المجموع يساوي 10 و المجموع أكبر من 8 و لنحدث الفراغ المقابل لكل حال.

- الفراغ المقابل للحادث A ، المجموع يساوي 10 ، هو كما يلي :

$$A = \{(4,6),(6,4),(5,5)\}$$

- الفراغ المقابل للحادث B ، المجموع أكثر من 8 ، هو كما يلي :

$$B = \{(3,6),(6,3)(4,5),(5,4),(5,5),(4,6)(6,4),(5,6),(6,5)(6,6)\}$$

من خلال تطلعنا إلى مكونات الحادثين نلاحظ أن الحادث A محتوى في الحادث B $A \subset B$) و عليه فإن :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3/36}{10/36} = \frac{3}{36} x \frac{36}{10} = \frac{3}{10}$$

و نلاحظ أن :

$$\frac{3}{10} \neq P(A) = \frac{3}{36}$$

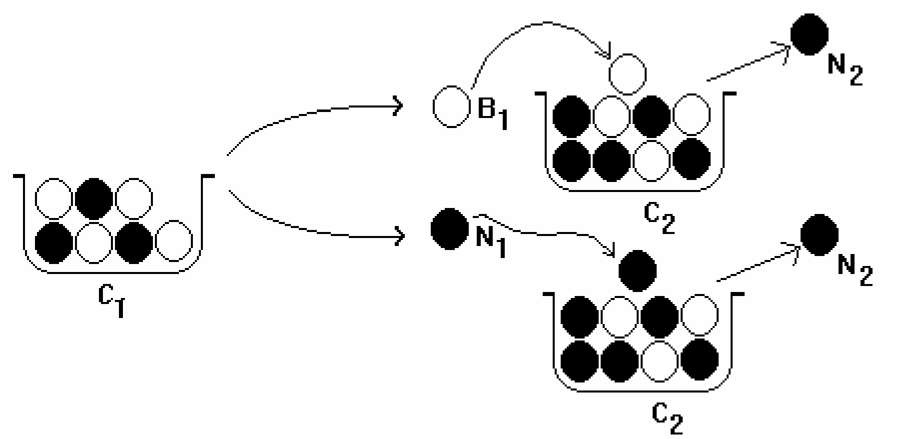
و هذا يعني أن A و B غير مستقلين .

- **-حل تطبيق (4-2):**

لنرمز بـ:

- B_1 : للحادث الدال على سحب كرة بيضاء من الكيس الأول ،
- N_1 : للحادث الدال على سحب كرة سوداء من الكيس الأول ،
- N_2 : للحادث الدال على سحب كرة sسوداء من الكيس الثاني .

لنمثل هذه التجربة بيانيا .



نلاحظ أن B_1 و N_1 تشكلان تجزئة للحادث الأكيد في تجربة سحب كرة من الكيس الأول ، أي أن :

$$N_1 \cap B_1 = \varnothing \quad , N_1 \cup B_1 = \Omega \quad , P(N_1)\ ,\ P(B_1) \geq 0$$

فحسب قانون الإحتمال الكلي :

$$P(N_2) = P(B_1).P(N_2 / B_1)+.P(N_1).P(N_2 / N_1)$$

ومن معطيات المسألة لدينا :

$$P(B_1) = \frac{4}{7} \quad , P(N_1) = \frac{3}{7} \quad , P(N_2 / B_1) = \frac{5}{9} \quad , P(N_2 / N_1) = \frac{6}{9}$$

و بالتعويض في علاقة الإحتمال الكلي نجد :

$$P(N_2) = P(B_1).P(N_2 / B_1) + .P(N_1).P(N_2 / N_1)$$
$$= \frac{4}{7} \ x\ \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \ x\ \frac{6}{9} = \frac{38}{63}$$

- **-حل تطبيق (5-2):**

لنرمز بـ:

- V_1 : للحادث الدال على أن فريدا يقود سيارته مسرعا .
- V_2 : للحادث الدال على أن فريدلا لا يقود سيارته مسرعا ،
- A : للحادث الدال على فريدا وقع له حادث .

نلاحظ أن V_1 و V_2 تشكلان تجزئة للحادث الأكيد في تجربة قيادة السيارة ، أي أن :

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing \quad , V_1 \cup V_2 = \Omega \quad , P(V_1)\ ,\ P(V_2) \geq 0$$

فحسب قانون الإحتمال الكلي :

$$P(A) = P(V_1).P(A / V_1)+.P(V_2).P(A / V_2)$$

ومن معهطيات المسألة لدينا :

$$P(V_1)=0.20 \quad ,P(V_2)=0.80 \quad ,P(A/V_1)=0.15 \quad ,P(A/V_2)=0.03$$

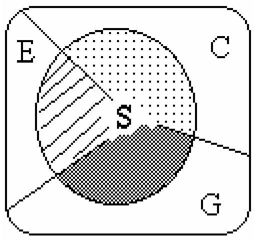
و بالتعويض في علاقة الإحتمال الكلي نجد :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(V_1).P(A/V_1)+.P(V_2).P(A/V_2) \\ &= (0.2 \ \text{x} \ 0.15) + (0.80 \ \text{x} \ 0.03) \\ &= 0.054 \end{aligned}$$

- **-حل تطبيق (6-2):**

ليكن :

- G : حادث كون الطالب من قسم علوم التسيير ،
- E : حادث كون الطالب من قسم العوم الإقتصادية ،
- C : حادث كون الطالب من قسم العلوم التجارية .
- S : حادث كون الطالب ناجح .



1- إن احتمال أن يكون الطالب ناجحا من أي قسم لا يهم و هذا يعني إنتمائه إلى المجموعة S كما هو مبين على الشكل البياني .

$$\begin{aligned} P(S) &= P(G).P(S/G)+P(E).P(S/E)+P(C).P(S/C) \\ &= \left(\frac{8}{10} \ \text{x} \ \frac{15}{40}\right)+\left(\frac{7}{10} \ \text{x} \ \frac{10}{40}\right)+\left(\frac{9}{10} \ \text{x} \ \frac{15}{40}\right)=\frac{3}{10}+\frac{7}{40}+\frac{27}{80}=\frac{65}{80} \end{aligned}$$

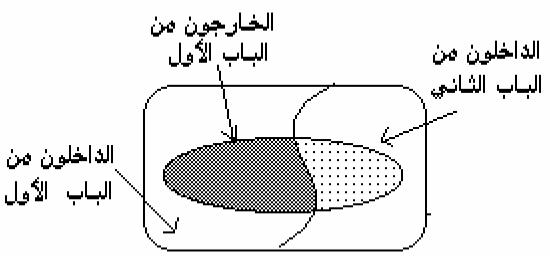
-2

$$P(G/S)=\frac{P(G).P(S/G)}{P(S)}=\frac{3/10}{65/80}=\frac{24}{65}$$

- **-حل تطبيق (7-2):**

يمكننا تجزئة مجموعة الزوار إلى مجموعتين :

- مجموعة تدخل من الباب الأول
- مجموعة تدخل من الباب الثاني



إن الحدث المشترك بين هاتين المجموعتين فيمكن اعتباره الخروج من الباب الأول وذلك أن الخروج من الباب الأول قد يكون لشخص دخل من الباب الأول أو من الباب الثاني .لنعمل على تلخيص هذا التحليل بشكل بياني .

حيث أن :

- المنطقة المخططة :(▒) تعني الداخلون من الباب الأول و الخارجون منه .

- المنطقة الممنقطة : (⬚) تعني الداخلون من الباب الثاني و الخارجون من الباب الأول .

لنرمز :

- لحادث الدخول من الباب الأول بالحرف : E ،
- لحادث الخروج من الباب الأول بالحرف : 0 .

ملاحظة :

لسنا في حاجة إلى تسمية حدثي الدخول من الباب الثاني و الخروج منه و ذلك لأن الأول يتمم الحدث E و الثاني يتمم الحدث 0 .

لنكتب الأن معطيات المسألة بدلالة الترميز الذي اعتمدناه .

- 40 % من الذين يدخلون من الباب الأول يخرجون منه ، أي : $P(O/E) = 0.4$
- 50 % من الذين يدخلون من الباب الثاني يخرجون منه ، أي : $P(\overline{O}/\overline{E}) = 0.5$
- 70% من الزوار يدخلون من الباب الأول ، أي $P(E) = 0.7$

1- لنحسب : $P(O)$.

من الواضح ان احتمال الخروج من الباب الأول يعتمد على الباب االذي دخل منه الشخص و هذا له إمكانيتين(بابين)، أي أن :

$$\begin{aligned} P(O) &= P(E).P(O/E) + P(\overline{E}).P(O/\overline{E}) \\ &= (0.7 \text{ x } 0.4) \quad + (1-0.7) \text{ x} (1-0.5) \\ &= 0.28 + 0.15 \\ &= 0.43 \end{aligned}$$

2- لنحسب احتمال الدخول من الباب الأول علما بأن الشخص قد خرج من الباب الثاني ، أي $P(E/\overline{O})$. ويمكننا هنا اعتماد الصيغة المناسبة نظرا للمعلومة المحصلة أي :

$$P(E/\overline{O}) = \frac{P(E \cap \overline{O})}{P(\overline{O})}$$

حيث أن :

$$\begin{aligned} P(\overline{O}/E) &= [1 - P(O/E] \\ P(\overline{O}) &= 1 - P(O) \end{aligned}$$

و بإجراء عملية التعويض نجد :

$$P(E/\overline{O}) = \frac{[1 - P(O/E].P(E)}{1 - P(O)} = \frac{0.6 \text{ x } 0.7}{0.57} = \frac{42}{57} = \frac{14}{19}$$

- حل تطبيق (8-2):

نلاحظ هنا أن : $\{M, F\}$ تشكل منظومة تامة للحوادث . و لنرمز بالحرف A كون الطالب (الطالبة) ناجحا .

نحن بصدد تجزئة للمجموعة الكلية ,وعليه فإننا بصدد الإحتمال الكلي , حيث أن :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)$$

و بإجراء عملية التعويض, بالنسبة لمثالنا , نجد :

$$P(A) = P(M).P(A/M) + P(F).P(A/F)$$
$$= 0,06 \ . \frac{1}{3} + 0,0036 \ . \frac{2}{3}$$
$$= 0,0224$$

وهذا يعني أن نسبة النجاح في هذا المجتمع الطلابي هي في حدود: 2.24 %

حل تطبيق (2-9) :

ليكن : B حادث كون الإختبار إيجابي، و M الحادث : الفرد مريضا .إذا المطلوب هو:

$$P(A) = P(M/B)$$

ومنه :

$$P(B).P(M/B) = P(M).P(B/M)$$

وبتقسيم الطرفين على : $P(B)$ (بفرض انه موجب) فنجد :

$$\frac{P(B).P(M/B)}{P(B)} = \frac{P(M).P(B/M)}{P(B)}$$

ومنه و بإجراء عملية الإختصار على $P(B)$ نجد :

$$P(B/M) = \frac{P(M).P(B/M)}{P(B)}$$

ومنه :

$$P(B) = \frac{P(M).P(B/M)}{P(B)}$$

و بإجراء عملية التعويض ، نجد :

$$P(A) = \frac{0,95 \ \ x}{P(B)}$$

ونعرف ان :

$$P(B) = P(M).P(B/M) + P(\overline{M}).P(B/\overline{M})$$

و بإجراء عملية التعويض :

$$P(B) = 0,95x + 0,1(1-x)$$
$$= 0,85x + 0,1$$

ومنه :

$$P(A) = \frac{0,95 \ \ x}{P(B)} = \frac{0,95 \ x}{0,85x + 0,1}$$

حل -تطبيق (10 -2)

نفرض أن A هو حادث كون القطعة جيدة و أن :

- A_1 هو كون القطعة جيدة من المخزن الأول
- A_2 هو كون القطعة جيدة من المخزن الثاني .

هذا يعني أن :

A2 : قطعة واحدة من السلعة على الأقل جيدة ،

- A2∩A1 : القطعتان جيدتان .

$$P(A_1) = \frac{C_{20}^1}{C_{25}^1} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$P(A_2) = \frac{C_{30}^1}{C_{40}^1} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{C_{20}^1}{C_{25}^1}\frac{C_{30}^1}{C_{40}^1} = \frac{20 \text{ x } 30}{25 \text{ x } 40} = \frac{4 \text{ x } 3}{5 \text{ x } 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{43}{4} - \frac{3}{5} = \frac{19}{20}$$

حل تطبيق -(11-2)

نفرض أن :

- RM نجاح في الرياضيات ،
- RS نجاح في الإحصاء .

و حسب معطيات المسألة فإن :

$$P(R_M \cap R_S) = 0.40 \quad æ \quad P(R_M) = 0.50$$

ومنه فإن :

$$P(R_S / R_M) = \frac{P(R_M \cap R_S)}{P(R_M)} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

حل تطبيق (12-2)-

لنفرض أن :

- A1 : الشخص الأول إمرأة ،
- A2 : الشخص الثاني رجل
- B : الشخص الثاني إمرأة .

المطلوب هو :

$P(A_i / B)$ حسب نظرية بابيز .

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(B)}$$

و لكن :

$$P(B) = P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2)$$

$$= \frac{5}{12} \text{ x } \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \text{ x } \frac{5}{11} = \frac{55}{132}$$

و يكون الإحتمال هو :

$$P(A_1 / B) = \frac{(5/12)\ x\ (4/11)}{55/(12x11)} = \frac{5x4}{12x11} x \frac{12x11}{55} = \frac{20}{55} = \frac{4}{11}$$

•-حل التطبيق (1 - 3)

لندرج أولا فراغا لإمكانات هذه التجربة . وهو فراغ منته يتكون من 10 إمكانات :

$$\Omega = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$$

و يأخذ المتغير العشوائي القيم التالية :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \Omega = \{ & (1,2,3), & (1,2,4), & (1,2,5), & (1,3,4), & (1,3,5), & (1,4,5), & (2,3,4), & (2,3,5), & (2,4,5), & (3,4,5) & \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X = \{ & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 10 & 9 & 10 & 11 & 12 & \} \end{array}$$

أي :

$$X = \{6,7,8,9,10,11,12\}$$

و يكون جدول التوزيع الإحتمالي كما يلي :

X	6	7	8	9	10	11	12
P	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

و نلاحظ أن :

- جميع القيم الإحتمالية موجبة ،
- مجموع الإحتمالات يساوي الواحد .

و بالتالي فنحن فعلا بصدد توزيع احتمالي .

•-حل التطبيق (3- 3)

لنرمز بـ:

- Y لحادث الرد ،
- N احادث عدم الرد .

إن فراغ إمكانات هذه التجربة منته و يتكون من 8 إمكانات :

$$\Omega = \{(YYY),(YYN),(YNY),(NYY),(YNN),(NYN),(NNY),(NNN)\}$$

نفرض أن X هو حالات الرد : $X = \{0,1,2,3\}$ ونعرف أن :

$$P(N) = \frac{3}{4} = 0.75 \qquad , P(Y) = \frac{1}{4} = 0.25$$

لنحسب الإحتمالات المقابلة :

$$P(X=0) = P(NNN) = 0.75\ x\ 0.75\ x 0.75 = (0.75)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$P(X=1) = P[(YNN) \cup (NYN) \cup, (NNY)] = 3\ x\left(\frac{1}{4} x \frac{3}{4} x \frac{3}{4}\right) = 3\ x \left(\frac{9}{64}\right) = \frac{27}{64}$$

$$P(X=2)=P\left[(YYN)\cup(YNY)\cup(NYY)\right]=3\ x\left(\frac{1}{4}x\frac{1}{4}x\frac{3}{4}\right)=3\ x\ \left(\frac{3}{64}\right)=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)=P(YYY)=0.25\ \ x\ 0.25\ \ x\,0.25=(0.25)^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

و لندرج الجدول التلخيصي لهذا التوزيع :

X	0	1	2	3
P	27/64	27/64	9/64	1/64

•-حل التطبيق (3 - 3)

1- لنتأكد أن التابع المعطى هو فعلا تابع كثافة .

$$\int_D f(x).dx=1 \;\; \Rightarrow \int_{-1}^{0} 3.x^2.dx=3.\int_{-1}^{0} x^2.dx=3.\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=\left[x^3\right]_{-1}^{0}=\left[0+1\right]=1$$

2- لنحسب الإحتمالات المطلوبة :

أ-

$$P(X>-\frac{1}{2})=\int_{-0.5}^{0} 3.x^2.dx=\left[x^3\right]_{-0.5}^{0}=\frac{1}{8}$$

ب-

$$P(X<\frac{1}{4})\ =\int_{-1}^{0.25} 3.x^2.dx=\left[x^3\right]_{-1}^{0.25}=\frac{63}{64}$$

•-حل التطبيق (4 - 3)

من خلال تطلعنا للتابع المعطى نلاحظ أنه حتى لا يكون f (x) سالبا يجب أن تكون $c\geq 1$ هذا بالنسبة للخاصية الأولى أم بالنسبة للخاصية الثانية :

$$f(x)=\int_0^1 f(x).dx=1$$

أي :

$$f(x)=\int_0^1 (c-x).dx=(c.x-\frac{1}{2}.x^2)\Big|_0^1=c-\frac{1}{2}=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

أي أن : C = 1.5

ومنه فالتابع هو :

$$f(x)=\begin{cases}1.5-x & x\in[0\ ,\ 1]\\ 0 & x\notin[0\ ,\ 1]\end{cases}$$

2- لنحسب قيمة الإحتمال المعطى :

$$P(\frac{1}{2}<x<1)=\int_{0.5}^{1}(1.5-x).dx=(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{0.5}^{1}=(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})-(\frac{3}{4}-\frac{1}{8})=\frac{3}{8}$$

• -حل التطبيق (5 - 3):

1- لكي يكون التابع المعطى تابع كثافة لابد من توافر الخاصيتين السابقتين :

- التابع غير سالب لجميع قيم x و هذا متحقق لأن التابع غير سالب في مجال تعريفه .

- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 ، بالفعل :

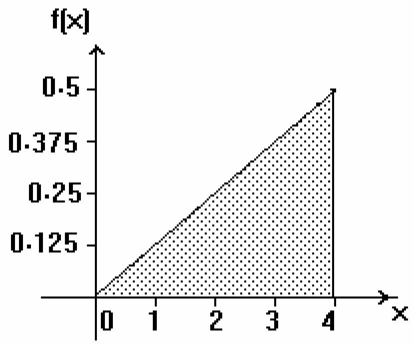
$$\int_D f(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x.dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x.dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{1}{8}.\frac{16}{2} = \frac{1}{8}.\frac{8}{1} = \frac{8}{8} = 1$$

و بالتالي فنحن فعلا بصدد تابع كثافة .

2- لنمثل هذا التابع بيانيا :

إن التمثيل البياني لهذا التابع يعطينا الشكل

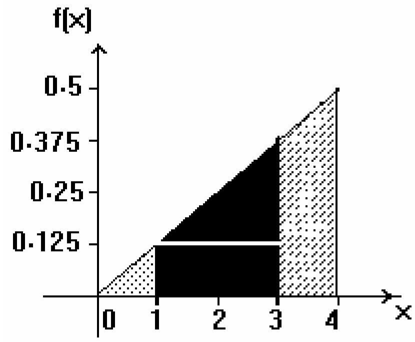
المقابل ☜



3 - لنحسب الاحتمالات المطلوبة :

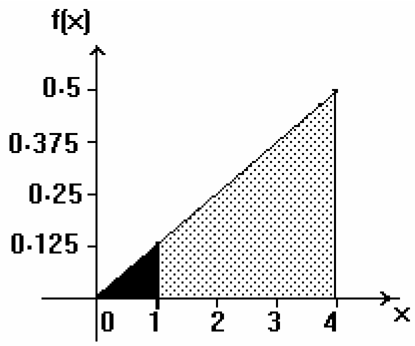
ا- بما أ ن المطلوب هو أخذ المتغير قيمة أقل أو تساوي صفر فإن x غير معرف حسب معطيات المسألة و بالتالي فإن الإحتمال يساوي صفر ، كما هو معطى في صيغة التابع أصلا .

ب-



$$P(1 \le x \le 3) = \int_1^3 \frac{1}{8}x.dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{16}(x^2)_1^3 = \frac{1}{16}(9-1)$$
$$= \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$
$$P(1 \le x \le 3) = 0.5$$

جـ-



$$P(x \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{8}x.dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{16}(x^2)_{01}^1 = \frac{1}{16}(1-0)$$
$$= \frac{1}{16}$$
$$P(x \le 1) = 0.0625$$

•-حل التطبيق (6 - 3):

الخطوة الأولى هنا تتمثل في لإيجاد النقاط التي يأخذها هذا المتغير ، وهذه النقاط هي :

$X = \{1, 3, 4, 7\}$

ومنه فإن :

$$P(X=1) = F(1) = \frac{1}{3}$$
$$P(X=3) = F(3) - F(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$
$$P(X=4) = F(4) - F(3) = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$
$$P(X=7) = F(7) - F(4) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

أي أن :

X	1	3	4	7
P	1/3	5/12	1/12	1/6

•-حل التطبيق (7 - 3):

- إذا كانت $x \le 0$ فإن : $F(x) = 0$

- إذاكانت : $0 < x < 2$ فإن :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0.dx + \int_{0}^{x} \frac{2-x}{2} dx$$
$$= (x - \frac{1}{4}x^2)\Big|_0^x = x - \frac{x^2}{4} = \frac{x(4-x)}{4}$$

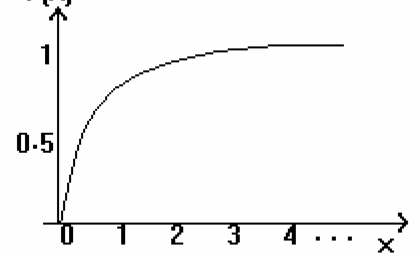
- إذا كانت $x \ge 2$ فإن :

$$F(x) = \int_D f(x).dx \int_{-\infty}^{0} 0.dx + \int_{0}^{2} \frac{2-x}{2} dx + \int_{2}^{+\infty} 0.dx = 1$$

و عليه فإن تابع التوزيع للمتغير العشوائي المعطى هو :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x(4-x)}{4} & 0 < x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

و هذا ما يمكن تمثيله بيانيا كما هو مبين في الشكل المقابل :



2- بالتعويض المباشر في تابع التوزيع نجد أن :

أ- $F(0.5) = \,^{7}/_{16}$ ، ب- $F(1) = \,^{3}/_{4}$ ، جـ : $F(3) = 1$ ، د- $F(-1) = 0$.

•-حل التطبيق (8- 3):

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{ÝíãÇ ÚÏÇ Ðáß} \end{cases}$$

ملاحظة :

عند الآشتقاق يجب الانتباه عند أطراف الفترات (المجالات) و التأكد من أن المشتقة موجودة عند هذه الأطراف .

$$P\,(0.5 < x < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} f(x).dx = \int_{0.5}^{1} x.dx + \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0.5}^{1} + \left.\frac{x}{2}\right|_{1}^{1.5} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

•

•-حل التطبيق (9- 3):

نلاحظ أن :

- الشرط الأول $f(x) \ge 0$ محقق من أجل قيم x .

- الشرط الثاني : $\int_D f(x).dx = 1$ محقق أيضا ، بالفعل :

$$\int_D f(x).dx = \int_0^2 f(x).dx = \int_0^1 x.dx + \int_1^2 (2-x).dx$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.(2x - \frac{x^2}{2})\right|_1^2 = \frac{1}{2} + (4 - \frac{4}{2}) - (2 - \frac{1}{2}) = 1$$

و بالتالي فالتابع المعطى هو تابع كثافة .

2- تعين تابع التوزيع :

أ - عندما يكون : $0 < x < 1$ يكون لدينا :

$$F(x) = \int_0^x x.dx = \frac{x^2}{2}$$

ب - عندما يكون : $1 \le x \le 2$ يكون لدينا :

$$F(x) = \int_1^x (2-x).dx = \left.(2x - \frac{x^2}{2})\right|_1^x = \frac{1}{2} + (2x - \frac{x^2}{2}) - (2 - \frac{1}{2}) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

و بالتالي تابع التوزيع يعطى على الشكل التالي :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0< x \le 1 \\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1 & 1< x < 1 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

-3

$$P(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}) \; = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) \; = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} \; = \frac{3}{4}$$

الفصل الرابع : المميزات العددية

الحصة رقم 8 ليوم .... /......../ 2014

- **-حل التطبيق (4-1):**

لنحسب التوقع الرياضي لهذا المتغير :

$$E[3x-2]= \sum P_i \; .[3x-2]$$
$$= (3(-1)-2(\frac{1}{4})) + (3(1)-2(\frac{1}{2})) + (3(2)-2(\frac{1}{16})) + (3(4)-2)(\frac{3}{16}))$$
$$=\frac{11}{8}$$

- **-حل تطبيق (2-4):**

-1

$$E(X) = \sum P_i . x_i$$
$$= ((-1).(\frac{1}{8})) + ((1).(\frac{1}{4})) + ((2).(\frac{7}{16})) + ((3).(\frac{3}{16})) = \frac{25}{16}$$

-2

$$E(X^2) = \sum P_i . x_i^2$$
$$= ((-1)^2.(\frac{1}{8})) + ((1)^2.(\frac{1}{4})) + ((2)^2.(\frac{7}{16})) + ((3)^2.(\frac{3}{16})) = \frac{61}{16}$$

-3

$$E(3X^2+5X-2)=3E(X^2)+5E(X)-2$$
$$=3(\frac{61}{16})+5(\frac{25}{16})-2=\frac{276}{16}=\frac{69}{4}$$

-4

$$E\left[(X-E(X))^2\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]=\sum(X-\mu)^2.P_i$$
$$=((-1-\frac{25}{16})^2(\frac{1}{8}))+((1-\frac{25}{16})^2(\frac{1}{4}))+((2-\frac{25}{16})^2(\frac{7}{16}))+((3-\frac{25}{16})^2(\frac{3}{16}))$$
$$=\frac{351}{256}$$

- **-حل التطبيق (3-4):**

1- لنحسب التوقع الرياضي لهذا المتغير العشوائي .

$$E(X)=\int_D x.f(x).dx$$
$$=\int_0^1 x.2x.dx=\int_0^1 2x^2.dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

-2

$$E(X^2)=\int_D x^2.f(x).dx$$
$$=\int_0^1 x^2.2x.dx=\int_0^1 2x^3.dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

-3

$$E(3x^2-2x+1)=\int_D (3x^2-2x+1).f(x).dx$$
$$=3\int_0^1 x^2.2x.dx-2\int_0^1 x.2x.dx+\int_0^1 2x.dx=\left[6\,(\frac{x^4}{4})-4(\frac{x^3}{3})+2(\frac{x^2}{2})\right]_0^1=\frac{7}{6}$$

- **-حل التطبيق (4-4):**

نحن بصدد تجربة ذات فراغ منته يتكون من 16 إمكانية وهي :

$$\Omega=\{(PPPP),(PPPF),\ldots,(FFFF)\}$$

ومنه فإن فراغ المتغير العشوائي X هو :

$$\Omega_X=\{0,1,2,3,4\}$$

لندرج جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي محل الدراسة (عدد مرات ظهور الصورة) .

x	0	1	2	3	4
P	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$

1- انحسب التوقع الرياضي :

$$E(X) = \sum x_i P_i$$

$$E(X) = ((0)(\frac{1}{16})) + ((1)(\frac{4}{16})) + ((2)(\frac{6}{16})) + ((3)(\frac{4}{16})) + ((4)(\frac{1}{16}))$$

$$= 0 + \frac{4}{16} + \frac{12}{16} + \frac{12}{16} + \frac{4}{16} = \frac{32}{16} \Rightarrow E(X) = 2$$

2- لنحسب التباين :

$$V(X) = \sum x_i^2 P_i - \mu^2$$

$$V(X) = \left[((0^2)(\frac{1}{16})) + ((1^2)(\frac{4}{16})) + ((2^2)(\frac{6}{16})) + ((3^2)(\frac{4}{16})) + ((4^2)(\frac{1}{16}))\right] - \left(2^2\right)$$

$$= 0 + \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} - 4 = \frac{80}{16} - 4$$

$$= 5 - 4 \Rightarrow V(X) = 1 \qquad \Rightarrow \delta_x = 1$$

الفصل الخامس : القوانين الاحتمالية

الحصة رقم 9 ليوم ..../........./ 2014