الفصل الأول

التحليل التوافقي

تمهيد:

من بين المفاهيم الأساسية التي لها علاقة وطيدة بالاحتمالات نجد التحليل التوافقي أو ما يعرف بطرق العد، والتي تهدف إلى تحديد عدد النتائج الكلية الممكنة لتجربة معينة (فضاء العينة)، وعدد عناصر الحادثة دون الحاجة إلى كتابة النتائج كلها؛ حيث يصعب أو يستحيل القيام بعملية تحديدها اعتمادا على طرق العد المباشر أو الحصر الشامل أو كتابتها كلها في حالة التجارب التي تكون نتائجها كبيرة. في هذه الحالة نستطيع معرفة عدد النتائج الكلية بواسطة طرق العد.

أولا- المبدأ الأساسي للعد:

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سيتم التطرق إليها من خلال هذه الفصول، وهو المبدأ الذي يعتمد على القاعدتين الآتيتين:

1.قاعدة الجمع: إذا كانت لدينا عمليتين متنافيتين a و b بحيث أن العملية a تتم بعدد من الطرق قدره n والعملية b تتم بعدد من الطرق قدرها m، فإن عدد الطرق لإتمام العمليتين a و b هو $(n+m)$.

مثال 1: طالب تحصل على شهادة البكالوريا، يريد أن يلتحق بجامعة أم البواقي أو جامعة قسنطينة، وكان مقبولا في جامعة أم البواقي بـ 4 كليات وفي جامعة قسنطينة بـ 3 كليات، فما هو عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب بإحدى الكليات:

<u>الحل:</u>

- عدد الطرق لقبول الطالب في كليات جامعة أم البواقي $n=4$.
- عدد الطرق لقبول الطالب في كليات جامعة قسنطينة $m=3$.

الطالب يلتحق بجامعة أم البواقي أو جامعة قسنطينة فالعمليتين متنافيتين، نستعمل قاعدة الجمع في معرفة عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب في إحدى الكليات، كالآتي:

$$n+m=4+3=7$$

عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب في إحدى الكليات هو 7 طرق.

2. قاعدة الضرب: والتي تنص على " أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما هي n_1 والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2 فإن النتائج الممكنة للتجربتين معا هي: $(n_1 \times n_2)$.

مثال2 : إذا كان لدينا امتحان الإحصاء متكون من تمرينين، حيث أن التمرين الأول مكون من 3 أسئلة والتمرين الثاني من 4 أسئلة. طلب من الطلاب الإجابة على سؤال واحد على الأكثر من كل تمرين.

ما هي عدد الحالات الممكنة لحل هذا الامتحان؟

الحل:

حسب المبدأ الأساسي للعد يكون للطالب 3 حالات لحل التمرين الأول (نرمز لها بـ n_1) و4 حالات لحا التمرين الثاني (نرمز لها بـ n_2) ولحل التمرينين معا يكون للطالب 12 حالة ممكنة:

$$n=n_1 x n_2= 3x4=12$$

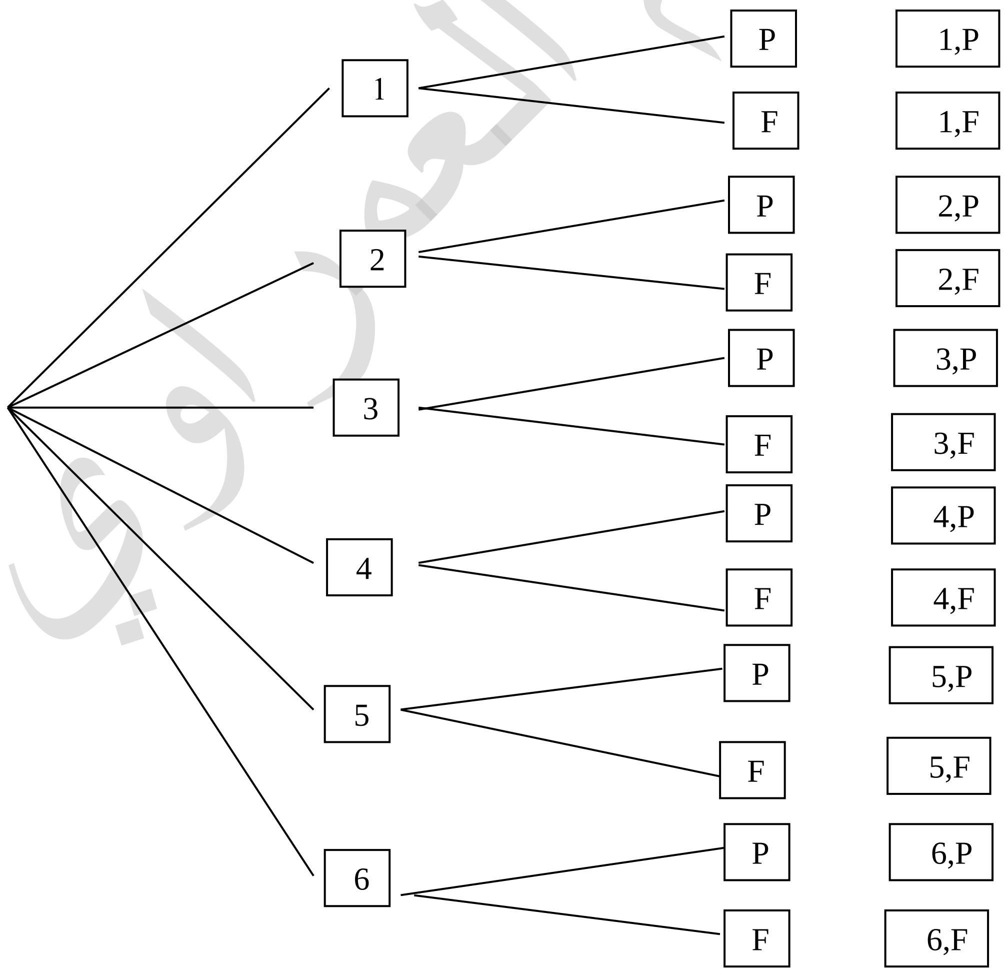
مثال 3: إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وزهرة نرد في آن واحد. ما هو هدد الحالات الممكنة لنتائج هذه التجربة.

الحل:

لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع على أحد الوجهين (P,F)، بينما زهرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة (1,2,3,4,5,6). ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو:

$$n=n_1 x n_2= 6x2=12$$

يمكن حل المثال أيضا من خلال الاستعانة بالشجرة البيانية التي تعتبر كطريقة لحساب عدد الحالات الممكنة للتجارب عندما يكون عدد النتائج منته (قليل). ويمكن توضيح ذلك كما يلي:



ثانيا– التباديل:

سوف نميز هنا بين نوعين من التباديل:

1. التباديل دون تكرار: يمكن أن نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة العناصر k مأخوذة في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي n=k. أي هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف الترتيب لأحد هذه العناصر على الأقل. ويعبر عنها بالعلاقة الرياضية التالية:

$$P_n = n!$$

N !: يقرأ n عاملي أو مضروب n، حيث أن:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \dots \times 2 \times 1$$

ويكون:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2 \times 1 = 2$$
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$
$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$
$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$
$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$
$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

مثال 4: ما هو عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف {a, b, c}؟

<u>الحل:</u>

من خلال العد المباشر نحصل على 6 طرق وهي:

(c,b,a)	(c,a,b)	(b,c,a)	(b,a,c)	(a,c,b)	(a,b,c)

كل واحدة من هذه التشكيلات يعرف بالتبديلة، حيث أنه هناك 6 تبديلات ممكنة من مجموعة لـ 3 عناصر مختلفة.

يمكن أيضا الحصول على هذه النتيجة من خلال استعمال قاعدة المبدأ الأساسي للعد؛ حيث يمكن اختيار الحرف الأول بـ 3 طرق، والحرف الثاني بـ 2 طرق، والحرف الثالث بـ 1 طريقة فقط. أي أن عدد الطرق هو:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

وهي النتيجة المحصل عليها أيضا من خلال العلاقة الرياضية للتباديل، حيث n=3:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

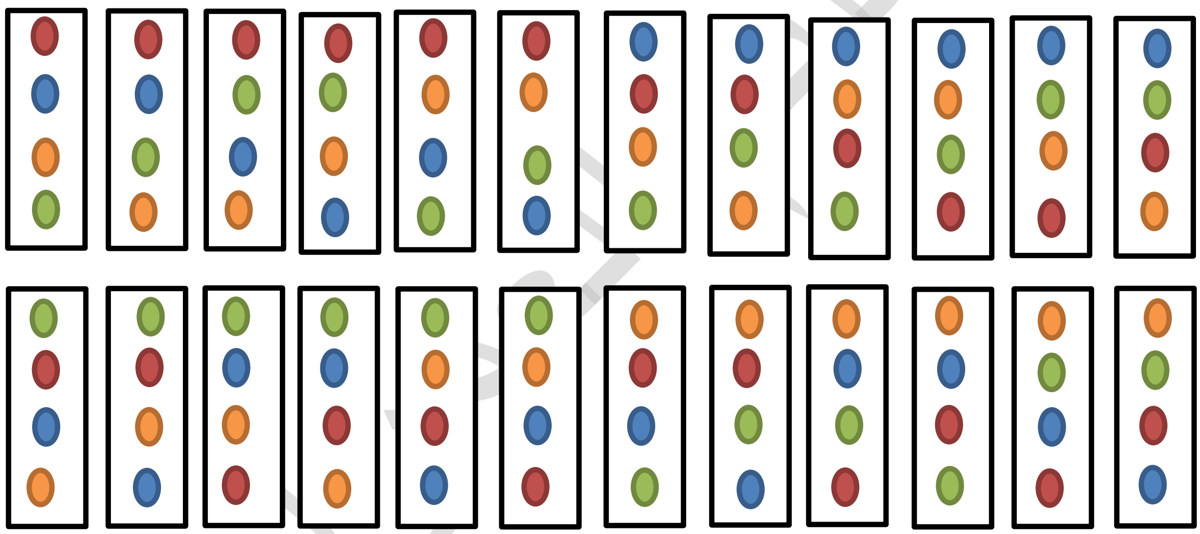
مثال5: لدينا 4 إشارات ضوئية ذات ألوان مختلفة (خضراء، حمراء، صفراء، برتقالية)، بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الأعلام في أماكن مخصصة على واجهة جدار.

الحل:

يمكن ترتيب هذه الإشارات الضوئية بـ 24 طريقة، وذلك وفقا لما تم حسابه باستعمال الصيغة الرياضية لحساب التباديل دون تكرار.

$$P_n = n!$$
$$P_4 = 4! = 24$$

لفهم الطريقة أكثر نستعين بالشكل الموالي الذي يبين هذه 24 طريقة:



إذن نلاحظ أن الترتيب مهم والعناصر لا تتكرر في المجموعة.

2. التباديل مع التكرار: أي أن بعض عناصر المجموعة تتكرر؛ فإذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرا n؛ حيث أن بعض العناصر تتكرر أي هي من نفس النوع (n_1 من النوع الأول، n_2 من النوع الثاني، n_3 من النوع الثالث، ...إلخ) ونريد ترتيبها، فعدد التبديلات هنا يعطى بالعلاقة الرياضية التالية:

$$p_n^{n_1,n_2,n_3\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ n_3! \ldots\ n_k!}$$

حيث أن:

($n_1, n_2, n_3,\ldots,n_k$) تمثل العناصر المتماثلة، ويكون: ($n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n$).

مثال 6: ما هو عدد التبديلات المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع أحرف كلمة recherche.

الحل:

لدينا عدد الحروف n=9، وهي موزعة كما يلي:

R=2, E=3, C=2, H=2

إذن:

$n_1=2,\quad n_2=3,\quad n_3=2,\quad n_4=2$

وعليه يكون عدد التبديلات الممكن تكوينها هو:

$$p_9^{2,3,2,2}=\frac{n!}{2!\ x\ 3!\ x\ 2!\,x\ 2!}=7560$$

- **حالة خاصة (التباديل الدائرية):** إذا قمنا بتبديل عناصر مجموعة (n) لكن ضمن وضعية دائرية، فإن عدد الطرق الممكنة هو:

$$P_n=(n-1)!$$

أي أننا نقوم بتثبيت العنصر الأول ثم نرتب بقية العناصر حوله وبالنسبة له.

مثال 7: بكم طريقة يمكن لعائلة تتكون من الأم والأب وخمسة إخوة أن يجلسوا حول طاولة مستديرة لتناول وجبة الطعام.

الحل:

مجموع أفراد الأسرة n=7، وعليه عدد طرق جلوس أفراد الأسرة حول طاولة مستديرة هو:

$$P_7=(7-1)!=6!=720$$

ثالثا – التراتيب:

إذا كانت لدينا مجموعة عناصر تحتوي على n عنصر، ونريد تشكيل مجموعة جزئية حجمها k عنصر كما أن ترتيب العناصر يؤثر على في شكل المجموعة المسحوبة، هنا نكون أمام ترتيبة، حيث $k\leq n$، ويمكن أن نميز بين نوعين من التراتيب:

1. التراتيب دون إرجاع: إذا كانت عملية السحب للمجموعة الجزئية تتم بدون إعادة العناصر المسحوبة، أي أن العناصر المسحوبة لا تظهر مرة أخرى في عملية السحب، في هذه الحالة نكون أما ترتيبة بدون إرجاع والتي يرمز لها بالرمز A_n^k، مع الإشارة إلى أن عامل ترتيب العناصر المسحوبة يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة.

إن عدد الترتيبات الممكن تشكيلها أو سحبها وفقا لهذه الصورة يعطى بالصيغة التالية:

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث أن: $k \leq n$.

في حالة ما إذا كانت n=k، فإن:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(0)!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$

لذلك هنالك بعض من الكتاب في نظرية الاحتمالات لا يفرقون بين التبديلة والترتيبة حيث يعتبرونهما نفس الشيء.

مثال 8: لتكن لدينا مجوعة الأرقام التالية: (1, 2, 3, 4, 5)، بكم طريقة مختلفة يمكنا تشكيل عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام السابقة مع استعمال الرقم مرة واحدة.

الحل:

لدينا n=5، ونريد سحب رقمين من مجموعة الأرقان الخمسة، أي k=2، مع عدم تكرار الأرقام، أي أن الأرقام: 11، 22، 33، 44، 55. لا تحتسب (سحب دون إعادة).

في هذه الحالة نحن أمام ترتيبة دون إرجاع، ذلك أن ترتيب كل رقم سيؤثر على قيمة العدد، فمثلا لو سحبنا الرقم الأول ووجدناه 2، وسحبنا الرقم الثاني ووجدناه 3، سيصبح العدد المشكل هو 23، أما إذا فرضنا أننا سحبنا الرقم الأول ووجدناه 3، ثم سحبنا الرقم الثاني ووجدناه 2، سيكون العدد المشكل هو 32. لذا في هذه الحالة نقول أن ترتيب سحب العناصر يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة.

من خلال الاستعانة بالصيغة الرياضية لحساب التراتيب دون إرجاع نجد عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من رقمين من مجموعة الأرقام الخمسة كالآتي:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20$$

يمكن أيضا الحصول على هذه النتيجة من خلال استعمال قاعدة المبدأ الأساسي للعد؛ حيث يمكن اختيار الرقم الأول بـ 5 طرق، والرقم الثاني ب 4 طرق، أي:

$$5 \times 4 = 20$$

2. التراتيب مع الإرجاع: إذا كانت عملية السحب بالإرجاع، أي أن العنصر المسحوب يتم إرجاعه، في هذه الحالة العنصر المسحوب يمكن أن يظهر مرة أخرى عند إجراء سحب جديد، ونكون هنا أمام ترتيبة بتكرار العناصر، والتي يرمز لها بالرمز AR_n^k.

فإذا كانت التجربة تتمثل في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة، وبما أنه توجد n طريقة مختلفة لاختيار الكرة في كل مرة، وبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نحصل عدد التشكيلات لسحب مجموعة كرات عددها k، كالتالي:

$$n \times n \times n \times n \ldots\ldots\ldots \times n = n^k$$

وبذلك يمكن إعطاء الصيغة الرياضية لعدد الترتيبات مع الإرجاع من خلال الآتي:

$$AR_n^k = n \times n \times n \ldots\ldots \times n = n^k$$

حيث أن:

K تمثل عدد مرات السحب؛

.k≤n

مثال 9: بالرجوع للمثال السابق رقم (8) والمتعلق بمجموعة الأرقام التالية: (1, 2, 3, 4, 5)، بكم طريقة مختلفة يمكننا تشكيل عدد مكون من رقمين مع إمكانية استعمال الرقم أكثر من مرة واحدة؟

<u>الحل:</u>

عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من رقمين من مجموعة الأرقام الخمسة **دون إرجاع** وجدناه سابقا كالآتي:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20$$

باستعمال الصيغة الرياضية للتراتيب مع الإرجاع نجد عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من رقمين من مجموعة الارقام الخمسة **مع الإرجاع** كالآتي:

$$AR_5^2 = 5\, x\, 5 = 5^2 = 25$$

ويمكن الاستعانة بالجدول الآتي وحصر عدد تشكيلات الأعداد الممكن تكوينها في حالة التراتيب دون الإرجاع ومع الإرجاع كالآتي:

تراتيب دون الإرجاع	تراتيب مع الإرجاع
12، 13، 14، 15	11، 12، 13، 14، 15
21، 23، 24، 25	21، 22، 23، 24، 25
31، 32، 34، 35	31، 32، 33، 34، 35
41، 42، 43، 45	41، 42، 43، 44، 45
51، 52، 53، 54	51، 52، 53، 54، 55

أي أن الأرقام: 11، 22، 33، 44، 55. لا تحتسب في حالة سحب دون إرجاع، وتحتسب في حالة ما إذا كان السحب مع إرجاع.

مثال 10: تنوي إحدى شركات الاتصال إنشاء خطوط هاتفية جديدة في إحدى الدول، حيث يتكون الخط الهاتفي من عشرة أرقام.

علما أن الرقم الأول يجب أن يكون 0، والرقم الثاني يجب أن يكون 6، والرقم الثالث يجب أن يكون 6.

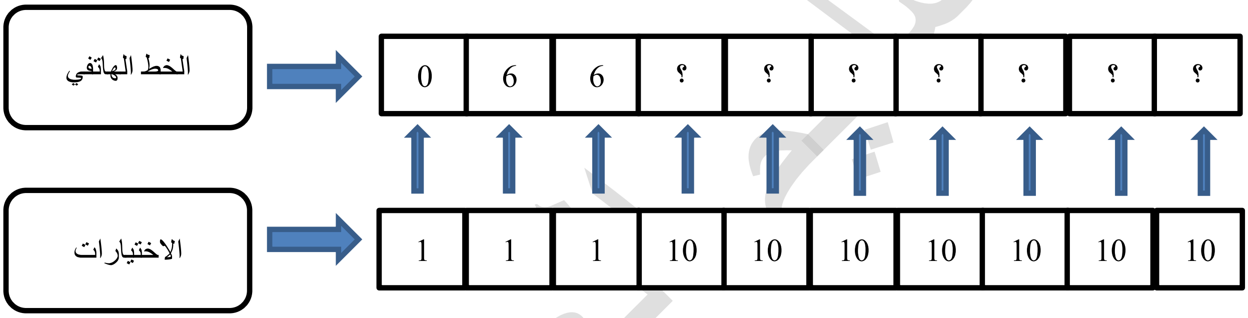
ما هو عدد الخطوط الهاتفية التي يمكن تشكيلها؟

الحل:

نحن أمام ترتيبة مع التكرار، حيث أن: n=10 (0، 1، 2،...،10) وk=7، وبالتالي عدد خطوط الهاتف الممكن تشكيلها هي:

$$AR_n^k = n^k$$
$$AR_{10}^7 = 10^7 = 10000000$$

يمكن تشكيل 10 ملايين خط هاتفي، ويمكن الاعتماد على الشكل الموالي للتوضيح أكثر:



عدد الخطوط هو:

$$1 \times 1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7 = 10000000$$

رابعا – التوافيق:

فرضا أنه لدينا مجموعة أشخاص عددها n، ونريد تشكيل لجنة عدد أعضائها k، حيث k≤n. فما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها؟.

نلاحظ أن حساب عدد اللجان الممكن تكوينها هو نفس مشكلة تكوين مجموعة جزئية من k عنصر من المجموعة الكلية n. لكن تشكيل التوفيقة يختلف عن تشكيل التبديلة من حيث أنه في التوفيقة لا نأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر.

إذن التوفيقة هي عبارة عن عدد الطرق الممكنة التي يتم بها اختيار k عنصر من بين n عنصر دون مراعاة أو الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر، أي أن الترتيب غير مهم، ولتوضيح الاختلاف بين الترتيبة والتوفيقة نأخذ المثال الآتي:

مثال 11: من خلال استعمال العد المباشر ماهي عدد التراتيب والتوافيق المكونة من حرفين مختلفين (k=2) التي يمكن تشكيلها من المجوعة المكونة من أربع أحرف (n=4) التالية: n={a,b,c,d}.

الحل:

من خلال العد المباشر نحصل على 12 ترتيبة كالآتي:

ab,ac,ad,ba,bc,bd,ca,ab,cd,da,db,dc

أما عندما نريد حساب التوافيق المكونة من حرفين فنحصل على 6 توفيقات فقط، وهي:

ab,ac,ad,bc,bd,cd

ويمكن توضيح الفرق بين الترتيبة والتوفيقة في الجدول الآتي:

التراتيب	التوافيق
ab,ba	ab
ac,ca	ac
ad,da	ad
bc,cb	bc
bd,db	bd
cd,dc	cd

الصيغة الرياضية لحساب التوفيقات نميز بين حالتين:

1. توافيق دون إرجاع: إذا كانت عملية السحب تتم دفعة واحدة أو سحب عنصر دون إرجاعه، في هذه الحالة نكون أمام توفيقة دون إرجاع أو دون إعادة، ويكون عدد المجموعات الممكن سحبها أو تشكيلها هو :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

حيث:

K تمثل عدد مرات السحب؛

.k≤n

بالعودة للمثال رقم 11 كانت عدد التوافيق المكونة من حرفين مختلفين (k=2) التي يمكن تشكيلها من المجوعة المكونة من أربع أحرف (n=4) التالية: n={a,b,c,d}. هي 6 توافيق فقط، وهي:

ab,ac,ad,bc,bd,cd

بتطبيق الصيغة الرياضية لحساب التوافيق دون إرجاع نحصل على نفس النتيجة:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$$

مثال 12: ما هو عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة من 10 أشخاص؟.

<u>الحل:</u>

لدينا k=4 و n=10 ، والترتيب هنا لا يهم، بتطبيق الصيغة الرياضية لحساب التوافيق دون إرجاع نحصل على:

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\,(10-4)!}=210$$

إذن يمكن تشكيل 210 لجنة مختلفة.

مثال 13: صندوق يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 كريات بيضاء، نقوم بسحب 3 كريات دفعة واحدة، ما هو عدد طرق سحب:

- 3 كريات؟
- 3 كريات حمراء؟
- 1 حمراء و 2 سوداء؟

<u>الحل:</u>

عدد الكريات في الصندوق n=10، عدد الكريات المسحوبة k=3، الترتيب لا يهم، والسحب يتم دفعة واحدة أي دون إرجاع.

باستعمال الصيغة الرياضية لحساب التوافيق دون إرجاع نجد:

- عدد طرق سحب 3 كريات هو:

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\,(10-3)!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{3!\times 7!}=120$$

- عدد طرق سحب 3 كريات حمراء: يكون من خلال سحب 3 كريات حمراء من بين 6 كريات حمراء، كما يلي:

$$C_{6}^{3}=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}=20$$

- عدد طرق سحب 1 كرية حمراء و 2 كرية بيضاء هو:

$$C_{6}^{1}\times C_{4}^{2}=\frac{6!}{1!\,(6-1)!}\times\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=6\times 6=12$$

2. توافيق مع الإرجاع: في حالة السحب مع إرجاع العنصر المسحوب فإنه من المحتمل أن يظهر العنصر المسحوب مرة أخرى عند إجراء سحب جديد. في هذه الحالة نكون أمام توفيقة مع الإرجاع، وتكون الصيغة الرياضية لحساب التوافيق مع الإرجاع هي:

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

مثال 14: ماهي عدد التوافيق المكونة من حرفين (k=2) التي يمكن تشكيلها من المجوعة المكونة من أربع أحرف (n=4) التالية: n={a,b,c,d}.

<u>الحل:</u>

معطيات هذا المثال هي نفسها معطيات المثال رقم (11) أين تم حساب عدد التراتيب والتوافيق دون إرجاع حيث كانت النتائج كالتالي:

- عدد التراتيب 12 ترتيبة.
- عدد التوافيق دون إرجاع 6 توافيق.

لحساب عدد التوافيق مع الإرجاع يمكن الاستعانة بالصيغة الرياضية للحساب كما يلي:

$$C_{4+2-1}^{2} = \frac{(4+2-1)!}{2!\,(4-1)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{12} = 10$$

من خلال العد المباشر يمكن توضيح الفرق التوفيقة دون إرجاع، والتوفيقة مع الإرجاع في هذا المثال كما يبين الجدول الآتي:

التوافيق مع الإرجاع (10 توافيق)	التوافيق دون إرجاع (6 توافيق)
ab, ac, ad, bc, bd, cd, aa, bb, cc, dd	ab, ac, ad, bc, bd, cd

مثال 15: لدينا 5 عدائين، نريد اختيار اثنين منهم للمشاركة في سباقين، بحيث يمكن لنفس الشخص أن يشارك في السباقين معا، بكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين.

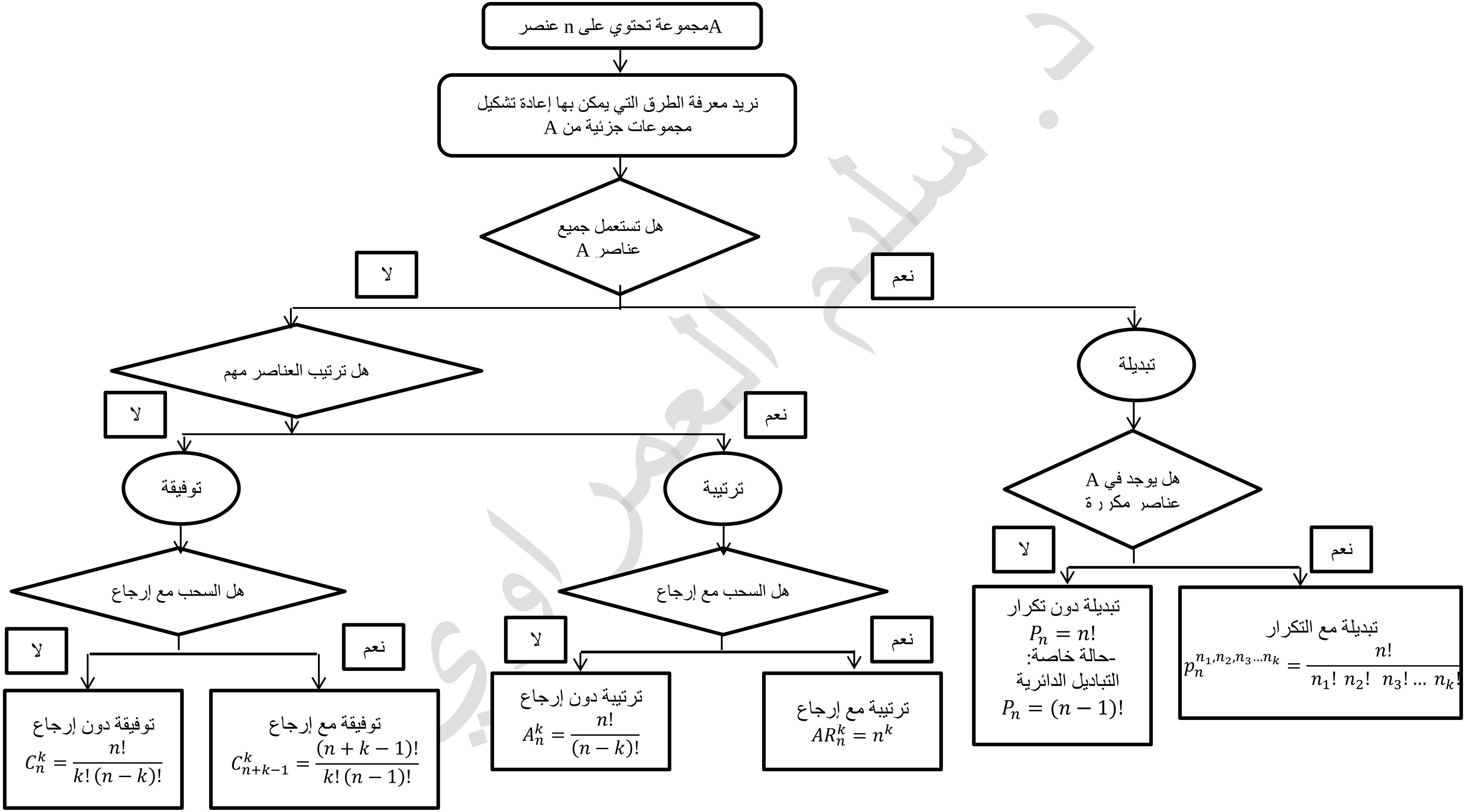
<u>الحل:</u>

K=2، n=5، الإرجاع ممكن، الترتيب غير مهم، بالتالي لدينا توفيقة مع الإرجاع، وعليه عدد الطرق الممكنة هو:

$$C_{5+2-1}^{2} = \frac{(5+2-1)!}{2!\,(5-1)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{30}{2} = 15$$

يمكن تقديم المخطط التوضيحي الموالي كملخص لهذا الفصل:

المخطط رقم (1): مخطط توضيحي لأهم مكونات فصل التحليل لتوفيقي



إعداد: د. سليم العمراوي بالتنسيق مع مسوؤل المقياس: أ.د. السعدي رجال

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير جامعة أم البواقي

قائمة المراجع المعتمدة:

1. السعدي رجال، نظرية الاحتمالات –التحليل التوافقي والمبادئ الاحتمالية، ج 3، دار البعث، دون سنة نشر.
2. موساوي عبد النور، يوسف بركان، الإحصاء 2، دار العلوم للنشر والتوزيع، عنابة، الجزائر، 2010.
3. بوبلوطة بلال، مطبوعة بعنوان: نظريات وتمارين محلولة في الاحتمالات، جامعة جيجل، الجزائر، 2017/2016.
4. جلال مصطفى الصياد، نظرية الاحتمالات، ط 6، دار حافظ للنشر والتوزيع، المملكة العربية السعودية، 2008.
5. سيمون ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر 2003.
6. عبد الحميد قطوش، مطبوعة بعنوان: الإحصاء 2، جامعة المسيلة، الجزائر، 2019/2018.
7. العمري علي، حيدوشي عاشور، وعيل ميلود، مطبوعة بعنوان: الإحصاء 2، جامعة البويرة، الجزائر، 2020/2019.

ملاحظة:

يمكنكم تتبع بعض المحاضرات على :

- صفحة **Facebook**

الحساب : **Ecoredzo**

- و على **YOUTUBE**

الحساب : **Redjel saadi**