République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et d'informatique

2 ème année Master Mathématiques Appliquées (2021-2022)

Éxamen Théorie du Contrôle

Nombre de pages de l'énoncé : 1. Coefficients : 2. crédits : 4.

Le 20-01-2022 de 9h à 10h30

Exercice 1 ***(07 pts)*** *Soit le système de contrôle linéaire d'un oscillateur harmonique* $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$ *où* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons qu'on cherche un contrôle qui transfère le point $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *au point final* $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *au temps* $t_1 = 2\pi$. *Avec la minimisation de la fonctionnelle (énergie)* $J(v) = \int_0^{2\pi} u^2(t)dt$.

1. *Montrer que la paire* (A, B) *est contrôlable.*
2. *Déterminer la grammienne de contrôlabilité.*
3. *Calculer le contrôle* $\overline{u}(t)$ *qui transfère le système de l'état initial* $y(0) = y_0$ *a un autre état* y_1 *dans un temps fini* $t_1 = 2\pi$.

Exercice 2 ***(07 pts)*** *Soit le système contrôlé suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) & = & Ay(t) + Bu(t), t \in (0, T], \\ y(0) & = & y_0, \\ z(t) & = & Cy(t), \end{cases} \tag{1}$$

où $y \in \mathbb{R}^n$ *est l'état du système,* $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ *est le contrôle et* $z \in \mathbb{R}^p$ *est la sortie et* $C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est une matrice linéaire bornée.*

1. Donner le système dual du système (1). "q est l'état adjoint".
2. Démontrer l'inégalité suivante : $\exists a > 0$ tq. $a\|q(0)\|^2 \leq \int_0^T \left\|B^T q(t)\right\|^2 dt, \forall q_T \in \mathbb{R}^n$.
3. Pourquoi ce système est contrôlable ?.

Exercice 3 ***(07 pts)*** *La position d'un train sur une voie est repérée par sa position* $y(t)$ *et son accélération est commandée par la relation*

$$\frac{d^2}{dt^2}y = u. \tag{2}$$

1. *Écrire l'équation (2) sous la forme d'un système de commande* $Y' = AY + Bu$.
2. *Montrer que le système est commandable.*
3. *Montrer qu'en se restreignant à des commandes* $u(t) = \pm 1$ *constantes par morceaux, le système reste commandable.*

Solution 1 *Soit le système de contrôle linéaire d'un oscillateur harmonique* $y'(t) = Ay(t) + Bu(t)$ *où* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *et* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *On a* $\dim A = 2$. *Est ce que* $rang\,(B, AB) = 2$ *?.*

   $rang\,(B, AB) = rang \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ *psq.* $\det \neq 0$. *Donc, la paire* (A, B) *est contrôlable.*

   .... ***(2 pts)***

2. *On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on calcul tout d'abord* e^{tA}, *on obtient :* $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. *On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on trouve que :*

$$\begin{aligned} G &= G\,(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{(2\pi - s)A^T} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 s & -\sin s \cos s \\ -\sin s \cos s & \cos^2 s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \pi I_2. \end{aligned}$$

   .... ***(2.5 pts)***

3. $\overline{u}\,(t) = B^T S^T\,(2\pi - t)\,y = B^T S^T\,(2\pi - t)\,\underbrace{y\,(2\pi, y_0, u)}_{=y_1}$. *Donc,*

   $\overline{u}\,(t) = B^T S^T\,(2\pi - t)\,y_1 = B^T S^T\,(2\pi - t)\left\{S\,(2\pi)\,y_0 + \int_0^{2\pi} S\,(2\pi - t)\,Bu(t)dt\right\}$.

   Et on a : $y_1 = S\,(2\pi)\,y_0 + Lu$ *donc* $y_1 - S\,(2\pi)\,y_0 = Lu$.

   Donc $G^{-1}\{y_1 - S\,(2\pi)\,y_0\} = G^{-1}Lu = \left(L^T\right)^{-1} L^{-1}Lu = \left(L^T\right)^{-1} u = y$. *Finalement*

$$\overline{u}\,(t) = B^T S^T\,(2\pi - t)\,y = B^T S^T\,(2\pi - t)\,G^{-1}\{y_1 - S\,(2\pi)\,y_0\}.$$

   $G^{-1}\{y_1 - S\,(2\pi)\,y_0\} = \frac{-1}{\pi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *alors* $\overline{u}\,(t) = \frac{-1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) & \sin(2\pi - t) \\ -\sin(2\pi - t) & \cos(2\pi - t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi - t)$ *est le contrôle désiré.*

   .... ***(2.5 pts)***

Solution 2 1. *Le système dual au système (1) est*

$$\begin{cases} q'(t) &= A^T q(t) + C^T v(t), t \in [0, T), \\ y\,(T) &= q_T, \\ \eta\,(t) &= B^T q(t), \end{cases}$$

où $q \in \mathbb{R}^n$ *est l'état du système dual,* $v \in L^2\,(0, T; \mathbb{R}^p)$ *est le contrôle et* $\eta \in \mathbb{R}^m$ *est la sortie.*

.... ***(2 pts)***

2. *On a :* $Kq_0 = z = B^T q$, *alors*

$$\|q_0\|^2 \leq \frac{1}{\|K\|^2} \|Kq_0\|^2 = \frac{1}{a} \langle Kq_0, Kq_0 \rangle = \frac{1}{a} \int_0^T \|Kq_0\|^2 \, dt = \frac{1}{a} \int_0^T \left\| B^T q(t) \right\|^2 dt.$$

Avec $a = \|K\| > 0$.

. . . . . ***(2.5 pts)***

3. *On a :* $a \|q(0)\|^2 \leq \int_0^T \left\| B^T q(t) \right\|^2 dt$
Cette condition est équivalent à dire que

$$\text{si } B^T q(t) = 0, \forall t \in [0,T] \ \text{ alors } q \equiv 0.$$

Cette dernière propriété est équivalent à la contrôlabilité du système (1).

. . . . . ***(2.5 pts)***

Solution 3 1. *En prenant pour état* $Y = (y; y')$, *on obtient* $Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$.

. . . . . ***(2 pts)***

2. *La matrice de commandabilité* $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang 2, le système est donc commandable.*

. . . . . ***(2.5 pts)***

3. *À partir d'un point* $Y_0 = (y_0; y_0') \in \mathbb{R}^2$, *la trajectoire du système associée à la loi de commande* $u \equiv +1$ *a pour équation* $y'' = 1$, *c'est-à-dire* $y'y'' = y'$, *et en intégrant*

$$\frac{1}{2} \left((y'(t))^2 - (y_0')^2 \right) = y(t) - y_0.$$

De même, l'équation de la trajectoire associée à la loi de commande $u \equiv -1$ *est*

$$\frac{1}{2} \left((y'(t))^2 - (y_0')^2 \right) = -y(t) + y_0.$$

Les orbites des ces deux trajectoires sont des paraboles couchées orientées en sens in-

verse (voir la figure 3).

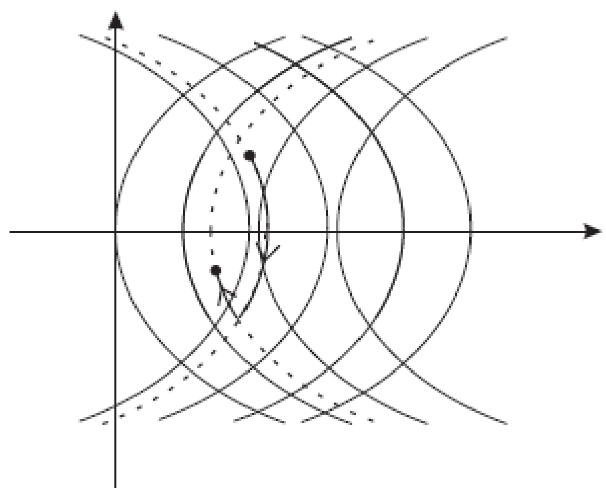

figure 3. Trajectoires dans le plan de phase

Donnons-nous maintenant un autre point Y_1 dans $\mathbb{R}^2$. Il est clair que l'une des paraboles issues de Y_0 doit couper l'une des paraboles issues de Y_1 : il suffit alors de suivre les trajectoires correspondantes pour obtenir une solution amenant le système de l'état Y_0 à l'état Y_1. Le système est donc commandable.

. . . . **(2.5 pts)**

Dr. I. Rezzoug