Université Larbi Ben M'Hidi-Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

Master 2^e année-S3 Mathématiques Appliquées, 2021-2022

Semi-Groupe et Théorie du Contrôle

Exercice 1 *Soit le système dynamique suivant :*

$$y' = Ay + Bu, \tag{1}$$

où $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & b \end{pmatrix} = (b_1 \mid b_2)$ *telle que* b *est un paramètre constante.*

q1 : *Étudier la contrôlabilité du système dynamique (1).*

q2 : *Étudier la contrôlabilité régulière du système dynamique (1).*

Exercice 2 *Étudier la contrôlabilité de l'état et de la sortie du système dynamique (2) :*

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)\, y(t) + B(t)\, u(t), \\ z(t) &= C(t)\, y(t) + D(t)\, u(t). \end{cases} \tag{2}$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ t & t \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ *et* $C(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ *sont définies pour* $t > 0$.

Exercice 3 *Soit le système dynamique suivant :*

$$y' = Ay + Bu, \tag{3}$$

où $A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

q1 : *Est-ce-que le système (3) est contrôlable ?.*

q2 : *Étudier la contrôlabilité du système (3) en utilisant le théorème de valeur propre.*

Exercice 4 *Soit le système dynamique suivant :*

$$y' = Ay + Bu, \tag{4}$$

où $A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

q1 : *Déterminer la forme de* J *et* G, J *est la forme de Jordan de* A.

q2 : *Étudier la contrôlabilité du système (4).*

Exercice 5 *Soit le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & Ay(t) + Bu(t), \ \forall t \in [t_0, T], \\ y(t_0) & = & y_0, \end{array} \right. \tag{5}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

q : *Trouver l'ensemble des conditions initiales* $\mathcal{M}(t_0)$ *pour lesquelles le système précédent est contrôlable à zéro.*

Exercice 6 *Vérifier si le système suivant est contrôlable :*

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t).$$

Exercice 7 *Donner une condition pour que le système suivant :*

$$y'(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t)$$

soit contrôlable.

Exercice 8 *Sous certaines conditions de vol, le mouvement d'un avion linéarisé autour d'un point d'équilibre est donné par :*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 2.8 \\ 0 & -3.13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_g \end{pmatrix},$$

où u_a *est le contrôle d'aileron et* u_g *le contrôle gouverne.*

q1 : *Est-ce-qu'on peut contrôler l'avion en éliminant le contrôle de gouverne* u_g*?.*

q2 : *Si les deux contrôles sont effectués, l'avion est-il contrôlable ?.*

Exercice 9 *Le système suivant est-il contrôlable ?*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -y_2(t) + \cos(t)u(t), \\ y_2'(t) & = & y_1(t) + \sin(t)u(t). \end{array} \right.$$

<u>**Dr. I. Rezzoug**</u>