Université Larbi Ben M'Hidi-Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

Master 2e année-S3 Mathématiques Appliquées, 2021-2022

Semi-Groupe et Théorie du Contrôle

Exercice 1 *Soit E un espace de Banach et f est une application définie de $[0,+\infty[\longrightarrow E$ continue et donnée.*

Considérons le problème suivant : Trouver une fonction y définie pour $t \geq 0$ à valeurs dans E telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} y' - Ay & = & f & \text{pour } t > 0, \\ y(0) & = & y_0 & y_0 \in \mathcal{D}(A), \end{array}\right. \tag{1}$$

A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe fortement continue $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$.

q1: *Quelle sont les conditions que doit vérifier y pour qu'il soit une solution forte "solution classique" et une solution mild.*

q2: *Si $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,E)$ (où $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathcal{D}(A))$, montrer que la solution de (1) est donnée par la formule suivante :*

$$y(t) = \mathcal{S}(t)\, y_0 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\, f(s)\, ds. \tag{2}$$

q3: *Dans quel domaine appartient y et y_0 pour que (2) soit une solution forte.*

Exercice 2 *Soit $\mathcal{S}(t)\,, t \geq 0$ un semi-groupe continu de générateur infinitésimal A.*

q1: *Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $t > 0$, on a $\int_0^t \mathcal{S}(\sigma)\, x d\sigma \in \mathcal{D}(A)$.*

q2: *En déduire que $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, c'est-à-dire que A est à domaine dense.*

Exercice 3 *Soit E un espace de Banach et $t \longmapsto \mathcal{S}(t) \in \mathcal{L}(E)$ un semi-groupe sur E. On note A le générateur infinitésimal de $\mathcal{S}(t)$.*

q1: *Rappeler la définition de l'opérateur A.*

q2: *Dans quel cas a-t-on $A \in \mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire A opérateur borné sur E?.*

q3: *On suppose à présent que $\mathcal{S}(t)$ est un semi-groupe continu, c'est-à-dire $\lim_{t\longrightarrow 0} \mathcal{S}(t)\, x = x$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|\mathcal{S}(t)\| \leq M e^{\omega t}$.*

q4: *Montrer que*

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{\mathcal{S}\left(t+h\right)x-\mathcal{S}\left(t\right)x}{h}=\mathcal{S}\left(t\right)Ax. \tag{3}$$

En déduire que pour tout $x\in\mathcal{D}\left(A\right),\mathcal{S}\left(t\right)x\in\mathcal{D}\left(A\right)$ *et* $\frac{d}{dt}\mathcal{S}\left(t\right)x=A\mathcal{S}\left(t\right)x=\mathcal{S}\left(t\right)Ax.$

Exercice 4 *Soit* $\mathcal{S}\left(t\right)$ *et* $T\left(t\right),t\geq 0$*, deux semi-groupes ayant même générateur infinitésimal* $A:\mathcal{D}\left(A\right)\subset E\longrightarrow E.$

q1: *Soit* $x\in\mathcal{D}\left(A\right).$ *Montrer que la fonction* $s\in[0,t]\longmapsto\mathcal{S}\left(t-s\right)\mathcal{S}\left(s\right)x\in E$ *est constante. (Calculer sa dérivée).*

q2: *En déduire que* $\mathcal{S}\left(t\right)x=T\left(t\right)x$ *pour tout* $x\in E$*, c'est-à-dire que le semi-groupe engendré par* A *est unique.*

Exercice 5 *On considère le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{lll} Y'\left(t\right) & = & A\left(t\right)Y\left(t\right) \quad Y\left(t\right)\in\mathbb{R}^2, \\ Y\left(0\right) & = & Y_0 \qquad\qquad\quad Y_0\in\mathbb{R}^2, \end{array}\right. \tag{4}$$

où $A\left(t\right)\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right).$

q1: *Rappeler la solution de ce système lorsque* A *ne dépend pas de* $t.$

q2: *On suppose que* $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$ *Montrer que la solution s'écrit* $Y(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}Y_0.$

q3: *On suppose que pour tout* $s,t\in\mathbb{R}$ *on a* $A\left(t\right)A\left(s\right)=A\left(s\right)A\left(t\right).$ *Montrer que la solution s'écrit* $Y(t)=\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)Y_0.$

q4: *On suppose que* $A\left(t\right)=\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$ *Montrer que le système (4) s'écrit* $\left\{\begin{array}{lll} x' & = & ty \\ y' & = & y\end{array}\right.$ *explicitement* $\left\{\begin{array}{lll} x & = & x\left(0\right)+\left[\left(t-1\right)e^t+1\right]y\left(0\right). \\ y & = & y\left(0\right)e^t.\end{array}\right.$

q5: *Montrer que* $\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2}\left(e^t-1\right) \\ 0 & e^t\end{pmatrix}.$

Exercice 6 *Soit* E *un espace de Banach, et soient* $A,B\in\mathcal{L}\left(E\right)$ *deux endomorphismes bornés.*

On a qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si les séries absolument convergentes sont convergentes.

q1: *Rappeler pourquoi on peut définir l'exponentielle* $e^A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n.$

q2: *Démontrer l'inégalité* $\left\|A\circ B\right\|\leq\left\|A\right\|\left\|B\right\|.$ *En déduire une estimation de* $\left\|e^A\right\|.$

q3: *Montrer que* $e^Ae^B=e^{A+B}$ *pour deux endomorphismes* A,B *qui commutent.*

q4: *Montrer que* $t\longrightarrow e^{tA}$ *est un semi-groupe uniformément continu.*

Exercice 7 *Soit E un espace de Banach, on considère l'application exponentielle* $\exp : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E), A \longmapsto e^{A}$.

q1: *Montrer que* $\exp$ *est différentiable en* 0 *et calculer sa différentielle. Montrer que* $\exp$ *est une application de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathcal{L}(E)$.*

q2: *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que* $\exp : B_{\mathcal{L}(E)}(0, \delta) \longrightarrow B_{\mathcal{L}(E)}(Id_E, \epsilon)$ *soit un difféomorphisme. On notera* $\ln : B_{\mathcal{L}(E)}(Id_E, \epsilon) \longrightarrow B_{\mathcal{L}(E)}(0, \delta)$ *l'inverse.*

q3: *Soit $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu, i.e. tel que $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathcal{L}(E), t \longmapsto \mathcal{S}_t$, est continue. Montrer qu'il existe t_0 et une fonction $t \longrightarrow A_t$ telle que $\mathcal{S}_t = e^{A_t}, \forall t \in [0, t_0]$.*

q4: *Montrer que $A_{nt} = nA_t$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, nt \in [0, t_0]$.*

q5: *Montrer que $A_{ts} = sA_t$ pour tous $s \in \mathbb{Q}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, st \in [0, t_0]$.*

q6: *Montrer que $A_{ts} = sA_t$ pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $t, st \in [0, t_0]$.*

q7: *En déduire que les semi-groupes uniformément contins sont les exponentielles d'applications linéaires bornées.*

Exercice 8 *Soit $E = L^2(\mathbb{R})$, on considère l'application "translation"*

$$(\mathcal{S}_t y)(x) = y(x+t), y \in L^2(\mathbb{R}^n), t \geq 0.$$

q1: *Montrer que $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu.*

q2: *Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.*

Exercice 9 *Soit E un espace de Banach, A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E et $B \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu sur E.*

q1: *On fixe $f \in E$. Montrer que l'équation $v + B(A + \lambda I)^{-1} v) = f$ admet une unique solution $v \in E$ lorsque λ est assez grand.*

q2: *En déduire que l'opérateur $A + B$, défini par $(A + B)y = Ay + By$ pour tout $y \in \mathcal{D}(A)$, est le générateur d'un semi-groupe $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$. Donner une majoration de $\|\mathcal{S}(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$.*

Exercice 10 *Pour tout $t \geq 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ on note $\mathcal{S}(t) f(x, v) = f(x - tv, v)$.*

q1: *Montrer que pour tout $p \geq 1$, la solution $\mathcal{S}$ définit un semi-groupe de contractions sur $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

q2: *Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.*

Dr. I. Rezzoug