Université Larbi Ben M'Hidi-Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

1ère année Master Mathématiques Appliquées, 2020-2021
Méthodes numériques pour EDO et EDP
Examen du 07 mars 2021
Nombre de pages de l'énoncé : 1. Durée 1h15mn.

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Justifiez vos réponses ! Il sera tenu compte de la présentation.

Exercice 1 ***Questions du cours.***

1. *Donner mes définitions de la continuité et de la coercivité d'une forme bi-linéaire.*

2. *Enoncer du lemme de Céa.*

Exercice 2 *On considère le problème : trouver* $y :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -\left((1+x)\,y'\right)' & = & x, \quad x \in]0,1[\,, \\ y(0) & = & 0, \\ y'(1) + y(1) & = & 0, \end{cases} \tag{1}$$

1. *Écrire la formulation variationnelle du problème (1) en choisissant comme l'espace des solutions et des fonctions test*

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^1(0,1) \text{ tels que } v(0) = 0 \right\}.$$

2. *Montrer une variante de l'inégalité de Poincaré : il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\|y\|_{L^2(0,1)} \leq \alpha \|y'\|_{L^2(0,1)} \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{V}.$$

3. *Montrer qu'il existe l'unique solution du problème (1) dans l'espace* $\mathcal{V}$.

4. *Construire la discrétisation du problème (1) par les éléments finis de degré 1 sur un maillage uniforme avec 4 nœuds à l'intérieur. Écrire le problème discret sur ce maillage dans la forme matricielle (calculer explicitement toutes les intégrales dans la matrice de rigidité et dans le membre de droite).*

5. *Donner une borne supérieure de l'erreur*

$$\|y - y_h\|_{H^1(0,1)}.$$

Dr. I. Rezzoug

Correction

Solution d'exercice N°1

1. Soit a une forme bi-linéaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{V}$:

a est continue, c'est-à-dire :

$$\exists C>0 \text{ t.q. } |a(y,v)| \leq C\|y\|\|v\|, \quad \forall y,v\in\mathcal{V}.$$

a est coercive (elliptique), c'est-à-dire :

$$\exists \beta>0 \text{ t.q. } a(y,y)\geq \beta\|y\|^2, \quad \forall y\in\mathcal{V}.$$

2.

Lemma 3 *de Céa : On suppose qu'il existe une solution $y\in\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{V}_h\subset\mathcal{V}$ un sous-espace d'approximation de dimension finie quelconque et soit $y_h\in\mathcal{V}_h$ la solution approchée. Alors il existe une constante $C\geq 1$ indépendante de h telle que*

$$\begin{aligned}\|y-y_h\|_{H^1(0,1)} &\leq C.dist(y,\mathcal{V}_h)\\ &\leq C.\inf_{v_h\in\mathcal{V}_h}\|y-v_h\|_{H^1(0,1)}\end{aligned}$$

Solution d'exercice N°2

1. $\mathcal{V}=\left\{v\in H^1(0,1) \text{ t.q. } v(0)=0\right\}$.

On prend l'équation différentielle, on le multiplie par $v\in\mathcal{V}$ et on intègre sur $]0,1[$:

$$-\int_0^1((1+x)y')'vdx=\int_0^1 xvdx, \forall v\in\mathcal{V}.$$

Donc,

$$\int_0^1(1+x)y'v'dx+2y(1)v(1)=\int_0^1 xvdx, \forall v\in\mathcal{V}.$$

Donc, la formulation faible s'écrit

$$\text{trouver } y\in\mathcal{V} \text{ tel que } a(y,v)=l(v), \forall v\in\mathcal{V},$$

où

$$\begin{aligned}a(y,v) &= \int_0^1(1+x)y'v'dx+2y(1)v(1),\\ l(v) &= \int_0^1 xvdx.\end{aligned}$$

2. L'inégalité du Poincaré

$$\|y\|_{L^2(0,1)}\leq\alpha\|y'\|_{L^2(0,1)} \quad \forall y\in\mathcal{V} \text{ (i.e. } \forall v\in H^1 \text{ t.q. } v(0)=0).$$

v' existe et est carré sommable. On peut écrire

$$v(x)=\int_0^x\frac{d}{dt}v(t)dt, \text{ (parce que } v(0)=0).$$

Alors, pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} v^2(x) &= \left(\int_0^x \frac{d}{dt} v(t)dt\right)^2 \\ &\leq \int_0^x \left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2 dt \int_0^x dt, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^2(x)\,dx &\leq \int_0^1 \left[\int_0^x \left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2 dt \times x\right] dx \\ &\leq \|v'\|^2_{L^2(0,1)} \times \int_0^1 x dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

donc,

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v'\|_{L^2(0,1)}.$$

Dans plus qu'une dimension on a

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq C\|v'\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

3. Montrons que la forme a est continue :

$$\begin{aligned} |a(y,v)| &= \left|\int_0^1 (1+x)\,y'v'dx + 2y(1)\,v(1)\right|, \quad \forall y,v \in \mathcal{V} \\ &\leq 2\|y'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + 2|y(1)|\,|v(1)|, \\ &\leq \left(2+2\widetilde{C}^2\right)\|y\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \end{aligned}$$

parce que on démontré dans le cours $|v(1)| \leq \widetilde{C}\|v\|_{H^1}, \forall v \in H^1(0,1).\widetilde{C} =$
2.

Montrons que la forme a est coércif :

$$\begin{aligned} a(y,y) &= \int_0^1 (1+x)\,y'y'dx + 2y(1)\,y(1), \quad \forall y \in \mathcal{V} \\ &\geq \int_0^1 y'y'dx + 2y(1)\,y(1) \\ &\geq \int_0^1 y'y'dx \\ &\geq \|y'\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

De l'autre côté :

$$\|y\|^2_{\mathcal{V}} = \|y\|^2_{H^1} = \|y\|^2_{L^2} + \|y'\|^2_{L^2} \leq \frac{3}{2}\|y'\|^2_{L^2}.$$

Donc,

$$a(y,y) \geq \|y'\|_{L^2}^2 \geq \frac{2}{3}\|y\|_{\mathcal{V}}^2, \ \forall y \in \mathcal{V}.$$

Continuation : Montrons que la forme linéaire l est continue sur $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left|\int_0^1 xvdx\right| \\
&\leq \int_0^1 |xv|\,dx \\
&\leq \left(\int_0^1 x^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^1 v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ d'après Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|v\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

En résumé, on a montré que la forme a est continue et coercife, et que la forme l est continue, le théorème de Lax-Milgram implique que notre problème a l'unique solution $y \in \mathcal{V}$.

4. On prend le maillage $x_i = ih$; $h = \frac{1}{5}$ et $i = \overline{0,5}$.

Les fonctions de base EF habituelles :

$$\underbrace{\phi_i(x)}_{i=\overline{1,5}} = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Attention : $\mathcal{V}_h = vect\{\phi_1, \cdots, \phi_5\}$.

On inclut ϕ_5 parce que les fonctions dans notre espace $\mathcal{V}$ ne s'annulent pas en $x = 1$.

Le problème discret :

$$\text{trouver } y_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que } a(\ y_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in \mathcal{V}.$$

Calculons $a(\phi_i, \phi_j), \forall i, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

Le cas $i = j, i = \overline{1,n}\ \ (n = 4)$.

$a(\phi_i, \phi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1+x)\phi_i'\phi_i'dx + 2\phi_i(1)\phi_i(1), 1 = x_5 = x_{n+1}$.

Donc,

$$a_{ii} = a(\phi_i, \phi_i) = \frac{2}{h}(1+x_i), i = \overline{1,4}.$$

Le cas $j = i+1$ avec $i = \overline{1, n-1}$

Donc,

$$\begin{aligned}
a(\phi_i, \phi_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x)\phi_i'\phi_{i+1}'dx \\
&= -\frac{1}{h}(1+x_i) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Le cas $i = j = n + 1$.

$a\left(\phi_{n+1}, \phi_{n+1}\right) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (1+x)\, \phi'_{n+1}\phi'_{n+1} dx + 2\phi_{n+1}(1)\, \phi_{n+1}(1), 1 = x_5 = x_{n+1}$.

Donc,

$$\begin{aligned} a_{n+1,n+1} &= \frac{1}{h}(1+x_n) + \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{2}{h} + \frac{3}{2}. \text{ Car } x_n = 1 - h. \end{aligned}$$

Le cas $i = n$ et $j = n + 1$

$\left(\phi_n, \phi_{n+1}\right) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (1+x)\, \phi'_n\phi'_{n+1} dx$.

Donc,

$$\begin{aligned} \left(\phi_n, \phi_{n+1}\right) &= -\frac{1}{h}(1+x_n) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{-2}{h} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rappelons que les coefficients de la matrice de rigidité sont :

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{h}(1+x_i) & \text{si} \quad i = \overline{1,4}. j = i \\ \frac{2}{h} + \frac{3}{2} & \text{si} \quad i = j = 5. \\ -\frac{1}{h}(1+x_i) - \frac{1}{2} & \text{si} \quad i = \overline{1,4}. j = i \pm 1 \\ 0 & \text{si} \quad |i - j| > 1. \end{cases}$$

Comme ça, on a tous les coefficients $a_{ij} = a\left(\phi_i, \phi_j\right)$ parce que la forme a est symétrique.

Calculons le terme à droite $b_i = l\left(\phi_i\right)$.

Si $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alors

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^1 x\phi_i(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x\phi_i(x)\, dx \\ &= hx_i. \end{aligned}$$

Donc on a le problème discret suivant :

$$\begin{pmatrix} 12 & -6.5 & 0 & 0 & 0 \\ -6.5 & 14 & -7.5 & 0 & 0 \\ 0 & -7.5 & 16 & -8.5 & 0 \\ 0 & 0 & -8.5 & 18 & -9.5 \\ 0 & 0 & 0 & -9.5 & 11.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $y \in \mathcal{V}$ une solution de (1).

Soit $I_h y$ l'interpolée de y dans $\mathcal{V}_h$, Donc,

$$\|y - y_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|y - I_h y\|_{H^1(0,1)},$$

où C est la racine carrée du rapport de la constante de continuité sur la constante de coercitivité, c-à-d. $C = \sqrt{3 + 3\widetilde{C}^2}$.

De plus, $y \in H^2(0,1)$:

$$\|y - y_h\|_{H^1(0,1)} \leq CKh \|y''\|_{L^2(0,1)} .$$

Donc,

$$\|y - y_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|y''\|_{L^2(0,1)} .$$