UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI

Département des Mathématiques et Informatique-L.M.D
Méthodes Numériques (Master 1. Semestre 1. **2020-2021**)

Correction de la première partie

Exercice 1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, K)$, K une partie compacte de $\mathbb{R}$. Nous considérons l'équation différentielle ordinaire suivante $y'(x) = f(x, y(x))$ avec une donnée initiale $y(0) = y_0$.*

Nous définissons $f^{(n)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, K)$ par :

$$\begin{cases} f^{(0)}(x, y(x)) = f(x, y(x)), \\ f^{(n+1)}(x, y(x)) = \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x}(x, y(x)) + \left(\frac{\partial f^{(n)}}{\partial y}(x, y(x))\right) f(x, y(x)), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que $y^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x, y(x))$.*

2. *Nous posons $\psi_p(x, y, \Delta x) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(\Delta x)^j}{(j+1)!} f^{(j)}(x, y)$, et définissons le schéma suivant :*

$$\begin{cases} y_0 = y(0), \\ y_{i+1} = y_i + \Delta x \psi_p(x_i, y_i, \Delta x). \end{cases}$$

Montrer que ce schéma est consistant d'ordre p.

3. *Montrer que le schéma est stable et en déduire que le schéma est convergent d'ordre p, c'est-à-dire, il existe $C > 0$ telle que*

$$|y(x_i) - y_i| \leq C (\Delta x)^p.$$

Solution d'exercice N°1

1. La démonstration par récurrence :

Nous vérifions que :

$$y^{(1)}(x) = y'(x) = f(x, y(x)) = f^{(0)}(x, y(x)).$$

Nous supposons que l'assertion est vraie à l'ordre m : $y^{(m)}(x) = f^{(m-1)}(x, y(x))$.

Montrons alors que $y^{(m+1)}(x) = f^{(m)}(x, y(x))$, pour cela, nous écrivons que :

$$y^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(y^{(m)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(f^{(m-1)}(x, y(x))\right).$$

Donc

$$y^{(m+1)}(x) = \frac{\partial f^{(m-1)}(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f^{(m-1)}(x, y(x))}{\partial y} y'(x).$$

Et puisque $y'(x) = f(x, y(x))$, nous obtenons :

$$y^{(m+1)}(x) = \frac{\partial f^{(m-1)}(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f^{(m-1)}(x, y(x))}{\partial y} f(x, y(x)) = f^{(m)}(x, y(x)).$$

2. Nous posons :

$$\psi_p(x, y, \Delta x) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(\Delta x)^j}{(j+1)!} f^{(j)}(x, y).$$

Et définissons le schéma suivant :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \psi_p(x_i, y_i, \Delta x).$$

Nous posons : $\phi(x, y, \Delta x) = \psi_p(x, y, \Delta x)$ c'est un schéma à un pas explicite. Pour démontrer la consistance nous vérifions que ϕ est continue et $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$.

En effet, puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction ϕ qui contient les dérivées jusqu'à l'ordre p de f est bien continue.

Ensuite

$$\phi(x, y, 0) = \frac{0^0}{1!} f^{(0)}(x, y) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{0^j}{(j+1)!} f^{(j)}(x, y) = f^{(0)}(x, y) = f(x, y).$$

Le schéma est bien consistant.

Pour l'ordre, nous calculons

$$R(x, y, h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \phi(x, y, h).$$

En remplaçant ϕ par son expression, nous avons :

$$\phi(x, y, h) = \psi_p(x, y, h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} f^{(j)}(x, y),$$

où $f^{(j)}(x, y) = y^{(j+1)}(x)$. Alors, nous obtenons :

$$\phi(x, y, h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^j}{(j+1)!} y^{(j+1)}(x) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} y^{(j+1)}(x).$$

Donc,

$$R(x, y, h) = \frac{1}{h} \left[y(x+h) - y(x) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} y^{(j+1)}(x) \right].$$

Donc,

$$R(x,y,h)=\frac{1}{h}\left[y(x+h)-y(x)-\sum_{j=1}^{p}\frac{h^j}{j!}y^{(j)}(x)\right]. \tag{1}$$

Par Taylor, on a :

$$y(x+h)=y(x)+\sum_{j=1}^{p}\frac{h^j}{j!}y^{(j)}(x)+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\zeta). \tag{2}$$

Donc,

$$R(x,y,h)=\frac{1}{h}\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\zeta)=\frac{h^p}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\zeta).$$

Comme $y^{(p+1)}$ est bornée (fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un compact). Nous obtenons donc : $\exists c>0 : |R(x,y,h)|\leq c.h^p$, le schéma est d'ordre p.

3. Pour la stabilité : f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une compacte et que toutes ses dérivées sont bornées. Ainsi, toutes les fonctions $f^{(j)}, j=\overline{0,p-1}$ sont Lipschitziennes donc ϕ est Lipschitzienne par rapport à la variable y. Le schéma est donc stable.

En appliquant le théorème du Lax, le schéma est convergent d'ordre p, il existe une constante $c>0$ t.q. $|y(x_i)-y_i|\leq c.(\Delta x)^p$.

Exercice 2 *Soit $a>0, b\in\mathbb{R}$ et $y_0\in\mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$y(0)=y_0 \quad et \quad (\forall t\in\mathbb{R}_+, y'(t)=-ay(t)+b), \tag{3}$$

1. ***(a)*** *Donner explicitement y "la solution exacte".*

(b) *Quel est le comportement de $y(t)$ quand $t\longrightarrow+\infty$?.*

2. *Soit $h>0$ un pas de temps.*

(a) *Ecrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (3).*

On notera $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}=(nh)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.

(b) *Donner explicitement $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(c) *Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit y_0, y_n tende quand $n\longrightarrow+\infty$ vers $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}y(t)$?*

(d) *On suppose cette condition satisfaite.*

Exprimer en fonction de a le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $y\,|_{[0,10]}$. (la discrétisation de $[0,10]$ avec N points)

- *Quel est ce nombre lorsque $a=100$?*

<u>Solution d'exercice N°2</u>

Soit $a > 0, b \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+, y'(t) = -ay(t) + b),$$

1.

(a) Les solutions du problème homogène sont données par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = k.\exp(-at), k \in \mathbb{R}.$$

Les solutions du problème non homogène sont données par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = \frac{b}{a} + c.\exp(-at), c \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(0) = y_0$ donc $c = y_0 - \frac{b}{a}$.

La solution de (1) est donc donnée par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = \frac{b}{a} + \exp(-at)\left(y_0 - \frac{b}{a}\right).$$

(b) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$y(t) = \frac{b}{a} + \exp(-at)\left(y_0 - \frac{b}{a}\right) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{a}.$$

2. Notons $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nh)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation.

Le schéma d'Euler explicite définit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation aux temps $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(-ay_n + b), \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } y(0) = y_0 \\ &= (1 - ah) y_n + hb. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_{n+1} = (1 - ah) y_n + hb$. Alors

$$\begin{aligned} y_0 &= (1 - ah)^0 y_0 \\ y_1 &= (1 - ah) y_0 + hb = (1 - ah)^1 y_0 + (1 - ah)^0 hb \\ y_2 &= (1 - ah) y_1 + hb = (1 - ah)^2 y_0 + (1 - ah)^1 hb + (1 - ah)^0 hb \\ &\ldots \end{aligned}$$

On a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = (1 - ah)^n y_0 + \sum_{k=1}^{n} (1 - ah)^{n-k} hb.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
y_n &= (1-ah)^n y_0 + \sum_{k=1}^{n} (1-ah)^{n-k} hb \\
&= (1-ah)^n y_0 + hb \frac{1-(1-ah)^n}{1-(1-ah)} \\
&= (1-ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a},
\end{aligned}
$$

car $1 - ah \neq 1$ puisque $ah > 0$. ($a > 0$ et $h > 0$)
On en déduit, Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = (1-ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a}.$$

(c) $\left(\forall y_0, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{cv}{\longrightarrow} \lim\limits_{t\longrightarrow\infty} y(t) = \frac{b}{a}\right) \Longleftrightarrow \left(\left((1-ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \underset{cv}{\longrightarrow} 0\right)$
Vérifions par ailleurs que

$$\left(\forall y_0, \lim_{n\longrightarrow+\infty} (1-ah)^n \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) = 0 \right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} (1-ah)^n = 0 \right).$$

. L'implication $\Longleftarrow$ est directe.
. L'implication $\Longrightarrow$ s'obtient en choisissant $y_0 = 1 + \frac{b}{a}$.
On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\left(\forall y_0, \lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n = \lim_{t\longrightarrow\infty} y(t)\right) &\Longleftrightarrow |1-ah| < 1 \\
&\Longleftrightarrow -1 < 1-ah < 1 \\
&\Longleftrightarrow -2 < -ah < 0 \\
&\Longleftrightarrow 0 < h < \frac{2}{a}.
\end{aligned}
$$

(d) Discrétisation $[0, 10]$ avec N points. Alors la taille du pas est $h = \frac{10}{N}$. Pour que la condition soit satisfaite, on doit avoir $\frac{10}{N} < \frac{2}{a}$ soit $N > 5a$.
. Il faut donc au moins $5a$ pas en temps.
. Lorsque $a = 100$, on doit effectuer au moins 500 pas.