UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI OUM EL BOUAGHI

Département des Mathématiques et Informatique-L.M.D
Méthodes Numériques (Master 1. Semestre 1. **2021-2022**)
Première partie (Révision)

Exercice 1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R},K)$, K une partie compacte de $\mathbb{R}$. Nous considérons l'équation différentielle ordinaire suivante $y'(x)=f(x,y(x))$ avec une donnée initiale $y(0)=y_0$.*

Nous définissons $f^{(n)}\in\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R},K)$ par :

$$\begin{cases} f^{(0)}(x,y(x))=f(x,y(x)), \\ f^{(n+1)}(x,y(x))=\frac{\partial f^{(n)}}{\partial x}(x,y(x))+\left(\frac{\partial f^{(n)}}{\partial y}(x,y(x))\right)f(x,y(x)), \quad n\geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que $y^{(n+1)}(x)=f^{(n)}(x,y(x))$.*

2. *Nous posons $\psi_p(x,y,\Delta x)=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{(\Delta x)^j}{(j+1)!}f^{(j)}(x,y)$, et définissons le schéma suivant :*

$$\begin{cases} y_0=y(0), \\ y_{i+1}=y_i+\Delta x\psi_p(x_i,y_i,\Delta x). \end{cases}$$

Montrer que ce schéma est consistant d'ordre p.

3. *Montrer que le schéma est stable et en déduire que le schéma est convergent d'ordre p, c'est-à-dire, il existe $C>0$ telle que*

$$|y(x_i)-y_i|\leq C(\Delta x)^p.$$

Exercice 2 *Soit $a>0, b\in\mathbb{R}$ et $y_0\in\mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$y(0)=y_0 \quad et \quad (\forall t\in\mathbb{R}_+, y'(t)=-ay(t)+b), \tag{1}$$

1. (a) *Donner explicitement y "la solution exacte".*

(b) *Quel est le comportement de $y(t)$ quand $t\longrightarrow+\infty$?.*

2. *Soit $h>0$ un pas de temps.*

(a) *Ecrire explicitement le schéma d'Euler explicite à pas constant h pour (1).*

On notera $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}=(nh)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des temps d'approximation, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs approchées correspondantes.

(b) *Donner explicitement $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(c) *Quelle condition doit satisfaire h pour que, quel que soit y_0, y_n tende quand $n\longrightarrow+\infty$ vers $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}y(t)$?*

(d) *On suppose cette condition satisfaite.*

Exprimer en fonction de a le nombre minimal de temps d'approximation impliqués dans un calcul approché de $y\mid_{[0,10]}$. (la discrétisation de $[0,10]$ avec N points)

- *Quel est ce nombre lorsque $a=100$?*

Deuxième partie (Révision)

Exercice 3 *Considérons le système aux limites suivant :* $y'' = (1 - \frac{x}{5})y + x$ *avec* $y(1) = 2$, $y(3) = -1$ *et* $h = 0.5$. *Trouver les valeurs approximatives de* y *aux points:* $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ *et* $x_3 = 2.5$.

Exercice 4 ***Équation de Poisson.*** *Résoudre le problème suivant :*

$$\frac{-d^2y}{dx^2} = 1, \Omega = [0,1] \quad avec \quad y(0) = y(1) = 0.$$

1. *En appliquant un schéma de différences finies centrées, déterminer la molécule de l'équation différentielle.*

2. *En choisissant un maillage avec un pas de* $h = 0,25$. *Calculer la distribution de températures. Comparer avec la solution exacte* $y(x) = \frac{-x^2+x}{2}$.

Exercice 5 ***Problème Elliptique (Problème de Dirichlet).*** *Une plaque mince rectangulaire* Ω_{abcd} *20cm×10cm est soumise aux températures de frontières par* $y_{ab} = 0°C$, $y_{bc} = 100°C$, $y_{cd} = 0°C$, $y_{ad} = 0°C$. *Sachant que le problème est régi par l'équation de Laplace, calculer la distribution de température dans la plaque. Prendre un maillage uniforme pour les cas suivants* $\Delta x = \Delta t = 5cm, \Delta x = \Delta t = 2.50cm$ *puis* $\Delta x = \Delta t = 1cm$. *Comparer avec la solution exacte.*

Exercice 6 ***Problème de Neumann.*** *Soit le problème suivant :*

$$-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 1 \quad dans \quad \Omega = [0,6] \times [0,2], \tag{2}$$

avec $y(0,t) = 20°$ *Celsius,* $y(6,t) = 20°C$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,2) = -15°C/cm$.

Donner la température dans une plaque Ω. *Prendre un pas uniforme* $\Delta x = \Delta t = 2cm$ *[donner le maillage, la discrétisation "par un schéma de différences finies centrées" et les équations algébriques de l'équation de Poisson (2) "sous forme* $A \times y = b$*"].*

Exercice 7 ***Problèmes Paraboliques.*** *Résoudre par la méthode explicite le problème parabolique suivant :*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0.25\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \ 0 \le x \le 2, 0 \le t \le \frac{3}{2}.$$

a. *Conditions aux limites aux deux extrémités* $y(0,t) = y(2,t) = 0$, $t > 0$.

b. *Condition initiale* $y(x,0) = \begin{cases} 100x & si \ \ 0 \le x \le 1. \\ 100(2-x) & si \ \ 1 \le x \le 2. \end{cases}$

c. *Fixer* Δt *par la relation de convergence* $\frac{0.25\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$ *sachant que* $\Delta x = 0.5$

Exercice 8 ***Problèmes Hyperbolique.*** *Soit le problème Hyperbolique suivant :*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 0.4,$$

avec les conditions aux limites $y(0,t) = y(1,t) = 0$. *Et les conditions initiales* $y(x,0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ *à* $t = 0$ *pour* $0 \leq x \leq 1$.

1. *Résoudre par la méthode explicite en prenant* $\Delta x = \Delta t = 0.2$

2. *Montrer que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux obtenus par la solution exacte* $y(x,t) = \sin(\pi x) \times \cos(\pi t)$.

Exercice 9 *On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout* $\mathbb{R}$ ($\alpha > 0$ *est donné) :* $\frac{\partial y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t > 0$ *et* $y(x,0) = y_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas Δx *en espace et* Δt *en temps :*

$$\frac{3y_{i,j+1} - 4y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2\Delta t} - \alpha \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i-1,j+1} - 2y_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Note on pourra poser $r = \frac{2\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$.

1. *Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ?.*

2. *Analyser la stabilité du schéma par la méthode de Von Neumann.*

3. *Quel est l'ordre du schéma?.*

Exercice 10 *Montrer que le schéma implicite centré :*

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2\Delta x} = 0$$

est consistant, précis à l'ordre 1 *en temps et* 2 *en espace, inconditionnellement stable, donc convergent.*

Exercice 11 *Montrer que, si la condition* $|\alpha| \Delta t \leq \Delta x$ *"CFL" n'est pas satisfaite, le schéma décentré amont :*

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta x} = 0$$

pour l'équation d'advection est instable pour la donnée initiale

$$y_{i,0} = (-1)^i.$$

Exercice 12 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0,\ x \in]0,1[,\ t \in]0,T[, \\ y(x,0) = y_0(x),\ x \in]0,1[, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0,\ t \in]0,T[. \end{cases} \tag{3}$$

Pour trouver une solution approchée de (3), on considère le schéma:

$$\begin{cases} \frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta t} = \frac{y_{i-1,j}-2y_{i,j}+y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}, \ i = 1,...,n-1, \ j = 1,...,m-1, \\ y_{0,j+1} = y_{n+1,j+1} = 0, \ j = 1,...,m-1, \end{cases} \tag{4}$$

où $(y_{i,0})_{i=1,...,n}$ *et* $(y_{i,1})_{i=1,...,n}$ *sont supposés connus,* $\Delta x = \frac{1}{n}, \Delta t = \frac{T}{m}$.

1. *Montrer que le schéma (4) est consistant. Quel est son ordre ?.*

2. *Montrer que le schéma (4) est inconditionnellement instable au sens de Von Neumann.*

On modifié "légèrement" le schéma (4) en prenant

$$\begin{cases} \frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta t} = \frac{y_{i-1,j}-(y_{i,j+1}+y_{i,j-1})+y_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}, \ i = 1,...,n, \ j = 1,...,m-1, \\ y_{0,j+1} = y_{n+1,j+1} = 0, \ j = 1,...,m-1. \end{cases} \tag{5}$$

3. *Montrer que le schéma (5) est consistant avec (3) quand* $\Delta x, \Delta t \longrightarrow 0$ *sous la condition* $\frac{\Delta t}{\Delta x} \longrightarrow 0$.

4. *Montrer que le schéma (5) est inconditionnellement stable.*

Troisième partie

Exercice 13 *Considérons le système de deux équations différentielles d'ordre 1 :*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 = f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = e^{2x}\sin x - 2y_1 + 2y_2 = f_2(x, y_1, y_2), \\ x \in [0,1], y_1(0) = -0.4, y_2(0) = -0.6, h = 0.1. \end{cases}$$

Appliquons la méthode de R-K d'ordre 4 à ce problème.

Exercice 14 *Soit le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = -4\frac{dy}{dx} + 4y, \\ y(0) = 1, y(2) = 2.62, h = 0.2. \end{cases}$$

Trouver la valeur approximative de la solution exacte y aux points $x_1 = 0.2$ *et* $x_2 = 0.4$*, par la méthode du tir.*

Exercice 15 *On considère l'équation de Poisson sur* $\Omega = (0,1)$

$$-y''(x) = 1.$$

Avec des conditions au bord de Dirichlet homogènes :

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Résoudre par la méthode des éléments finis en prenant $h = \frac{1}{3}$.

Exercice 16 ***(Elément finis P_1 pour le problème de Dirichlet)***

On considère l'intervalle $\Omega = \left]0,1\right[$ *et on introduit l'espace* $V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ et } v(0) = 0\}$.

Soient $f \in L^2(\Omega)$ *et deux réels* α, β *avec* $\alpha > 0$. *On pose* $a(y,v) = \int_\Omega y'(x)\, v'(x)\, dx + \alpha y(1)\, v(1)$ *et* $L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \beta v(1)$.

Pour tout $y, v \in V$. *On considère le problème suivant :*

$$\textit{Trouver } y \in V \textit{ tel que } a(y,v) = L(v), \forall v \in V. \tag{6}$$

On admet que ce problème est bien posé (cela se démontre par le théorème de Lax-Milgram).

1. Obtenir l'EDP dans Ω et les conditions limites satisfaites par la solution (6).

On considère un maillage uniforme de Ω *de pas* $h = \frac{1}{n+1}$, n *entier positif fixé, et on pose* $x_i = ih$ *pour tout* $i \in \{0, \cdots, (n+1)\}$. *On note* V_h^1 *l'espace constitué des fonctions continues et affines par morceaux sur chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$

$$V_h^1 = \left\{v_h \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right); \forall 0 \le i \le n, v_h\,|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1\right\},$$

Et on désigne par $\{\phi_i\}_{0 \le i \le n+1}$ *les fonctions de bases de* V_h^1. *Il s'agit, pour* $1 \le i \le n$, *des fonctions chapeau vues en cours, alors que pour* $i \in \{0, \cdots, (n+1)\}$, *ces fonctions sont définies de manière analogue mais leur support est réduit à une maille. Par exemple,*

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{h} & \textit{si } x \in [x_n, x_{n+1}], \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On introduit enfin le sous-espace $\widetilde{V}$ *de* V_h^1 *tel que*

$$\widetilde{V} = \left\{v_h \in V_h^1; v_h(0) = 0\right\}.$$

2. Quelle est la dimension de $\widetilde{V}$? ***En préciser une base.***

• *On assemble la matrice de rigidité A du problème* ***(6)*** *en utilisant cette base.* ***Préciser le terme générique de cette matrice*** *(sans le calculer).*

• ***Montrer enfin que la matrice*** A ***est définie positive.***

3. Identifier les coefficients non nuls de la matrice A, ***puis calculer la valeur numérique de ceux-ci.***

Exercice 17 *Appliquer la méthode des éléments finis* P_1 *au problème*

$$-y'' = f \quad \textit{dans} \quad \left]0,1\right[,$$

avec $y(0) = \alpha$ *et* $y(1) = \beta$.

Vérifier que les conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes apparaissent dans le second membre du système linéaire qui en découle.

Exercice 18 *On reprend le problème de Neumann*

$$-y'' + ay = f \text{ dans }]0,1[, \tag{7}$$

avec $y'(0) = \alpha$ *et* $y'(1) = \beta$.

en supposant que la fonction $a(x) = 0$ *dans* $]0,1[$. *Montrer que la matrice du système linéaire issu de la méthode des éléments finis* P_1 *est singulière. Montrer qu'on peut néanmoins résoudre le système linéaire si les données vérifient la condition de compatibilité* $\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha - \beta$, *et que cette condition est préservée si l'on utilise des formules de quadrature.*

Exercice 19 *Appliquer la méthode des différences finies au problème de Dirichlet*

$$-y'' = f \text{ dans }]0,1[,$$

avec $y(0) = 0$ *et* $y(1) = 0$.

Vérifier qu'avec un schéma centré d'ordre deux, on obtient un système linéaire à résoudre avec la même matrice K_h *(à un coefficient multiplicatif près) que celle issue de la méthode des éléments finis* P_1 *mais avec un second membre* b_h *différent. Même question pour le problème de Neumann (01).*

Exercice 20 *Expliciter la matrice de rigidité* K_h *obtenue par application la méthode des éléments finis* P_k *au problème de Neumann*

$$\begin{cases} -\Delta y + ay = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, *et* $a \in L^\infty(\Omega)$ *tel que* $a(x) \geq a_0 >$*p.p. dans* Ω.

Exercice 21 *Etudier la convergence de la méthode des éléments finis en dimension 1 appliquée de diffusion (7) avec conditions aux limites de type Neumann.*