المحور الثاني: نظرية التقدير

تمهيد:

تعد نظرية التقدير من أهم موضوعات الإحصاء الاستنتاجي، وهو الأسلوب الذي عن طريقة نصل إلى خلاصة حول المجتمع الإحصائي بناءا على المعلومات التي تحتويها العينة المختارة عشوائيا من هذا المجتمع، حيث تهتم بتقدير المعلمات المجهولة للتوزيعات الاحتمالية التي تصف نتائج التجارب العشوائية. ففي هذا المحور سنتعرض إلى طرائق الحصول على التقديرات لهذه المعلمات دون الخوض في البراهين الرياضية.

1- نظرية التقدير للمتوسطات لمجتمع واحد:

التقدير هو أسلوب يعتمد على حسابات بعض الإحصاءات من بيانات العينة التي تعطي قيم تقريبية للمعلمات المناظرة لها في المجتمع الإحصائي المختارة. و يمكننا الحصول على تقدير معالم المجتمع (δ_{X_i}, U_{X_i}) إما بنقطة أو بفترة:

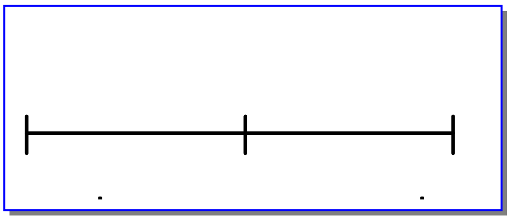
- **التقدير بنقطة:** إن التقدير بنقطة يعني استخدام بيانات العينة لحساب قيمة واحدة (Single value) بحيث تكون أفضل تخمين لمعلمة المجتمع الذي يصف خاصية معينة من خصائصه، وهناك عدة طرق لايجاد التقديرات بنقطة منها: طريقة الأرجحية العظمى، طريقة العزم، طريقة بابيز (لا نتعرض لها في المطبوعة).
- **التقدير بمجال:** هو المدى أو المجال من القيم مقرون باحتمال أن يضم هذا المدى معالم المجتمع غير معروفة ، ويسمى هذا الاحتمال بفترة الثقة ويمكن إيجاد قيمة احتمال حسب خصائص العينة والمعلومات المتوفرة عنها.

1-1- فترة الثقة حول المتوسط عندما يكون التباين معلوم:

إذا كانت $(x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots x_n)$ تشكل عينة عشوائية من توزيع معين بمتوسط يساوي(U_x) وتباين $(\delta^2 x)$ فإنه يمكن تكوين فترة الثقة حول المتوسط، وذلك من خلال دراسة توزيع المعاينة لمتوسط المعاينة، وبالتالي يمكن تقدير متوسط المجتمع كما يلي: $\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp d$ حيث

$$d = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}}$$

والشكل التالي يوضح هذه العلاقة:



ولقد رأينا في المحور الثاني، أنه إذا كانت المعاينة من مجتمع طبيعي أو مجتمع غير طبيعي ولكن حجم العينة كبير $(n\geq30)$ فإن المتغير العشوائي للمعاينة يتبع توزيع طبيعي. وكذلك إذا علم توزيع المجتمع (موزعا طبيعيا) وحجم العينة كبير $(n \geq 30)$ أو صغير $(n < 30)$ فإن المتغير العشوائي للمعاينة يتبع توزيع طبيعي.

$$\cup_{\overline{X}} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}}$$

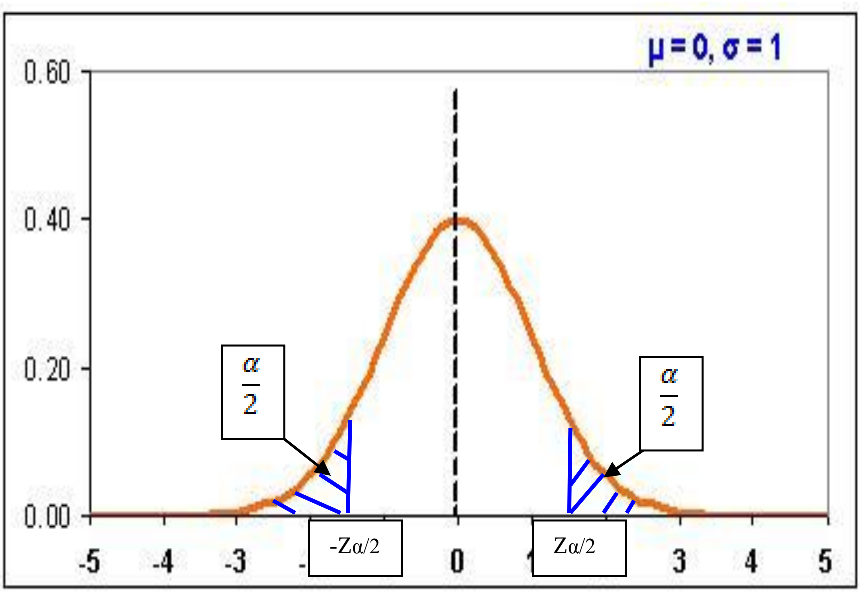
وبالتالي فإن المتغير العشوائي $(\overline{X_i})$ يتبع توزيع طبيعي كما يلي:

$$\overline{X_i} \sim N(\cup_{\overline{X_i}} ; \frac{\delta^2{}_{\overline{X}}}{n})$$

وعليه فإن توزيع المعاينة للاحصاءة:

$$Z = \frac{\overline{X}_i - \cup_{\overline{Xi}}}{\delta_{\overline{Xi}}}$$

ويمكن تمثيل التوزيع الطبيعي المعياري *N(0 ;1)* بيانيا كما يلي:



فترات الثقة أكثر استخداما هي:

- ✓ عند درجة ثقة 95% أي أن α=5% فإن $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1,96$
- ✓ عند درجة ثقة 99% أي أن α=1% فإن $Z_{\frac{\propto}{2}} = 2,58$
- ✓ عند درجة ثقة 90% أي أن α=10% فإن $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1,64$

عند درجة الثقة: $\propto = \mathbf{5\%} \leftarrow \boldsymbol{c} = \mathbf{95\%}$

$$\propto + c = 100\% \sim \propto + c = 1$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{(1-0,025)}$$

من جداول التوزيع الطبيعي نجد $\leftarrow$ $Z_{0,975} = 1,96$

عند درجة الثقة: $\propto = \mathbf{1\%} \leftarrow \boldsymbol{c} = \mathbf{99\%}$

$$Z_{\frac{\propto}{2}} = Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{0,995}$$

من جداول التوزيع الطبيعي الجزئية نجد: $Z_{0,995} = 2,58$

عند درجة الثقة: $\propto = \mathbf{10\%} \leftarrow \boldsymbol{c} = \mathbf{90\%}$

$$Z_{\frac{\propto}{2}} = Z_{1-\frac{\propto}{2}} \rightarrow Z_{1-\frac{0,1}{2}} = Z_{0,95}$$

$$Z_{0,95} = 1,64$$

من خلال ما سبق يتضح لنا أن:

$$\hat{\text{U}}_X = \text{U}_{\overline{X}} \mp d$$

$$\text{U}_{X_i} = \text{U}_{\overline{X}_i} \mp Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}_i}$$

$$P\left(\text{U}_{\overline{X}} - d \leq \hat{\text{U}}_X \leq \text{U}_{\overline{X}} + d\right) = 95\% = 0,95$$

نظرية التقدير

$$P\left(U_{\overline{X}}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{X}_i}\leq \hat{U}_X \leq U_{\overline{X}}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{X}_i}\right)=95\%=0{,}95$$

d: الخطأ في تقدير متوسط المجتمع باحتمال معين.

مثال:

في دراسة عن تلوث الهواء لأكسيد الكبريت المنبعث سحبت عينة مكون من قراءات سابقة، وحسب متوسطها الذي قدرب (18,85طن) وانحراف معياري للمجتمع 5,55،أحسب باحتمال 0,95 مقدار قيمة الخطأ في تقدير متوسط المجتمع؟ ثم قدر متوسط المجتمع؟

الحل:

$U_{\overline{X}}=18{,}85 \qquad n=80$

$\delta_x=5{,}55$

- **حساب الخطأ في تقدير المتوسط المجتمع باحتمال95% :**

$$d=Z_{\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{X}}$$

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات:

ما دام $N=?$ نفرض أن $\frac{n}{N}\leq 0{,}05$ ولا نستخدم معامل التصحيح

$$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta_X}{\sqrt{n}}=\frac{5{,}55}{\sqrt{80}}=0{,}62$$

من جداول التوزيع الطبيعي:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0{,}975}=1{,}96$$

ومنه: $d=1{,}96*0{,}62=1{,}21$

- **تقدير متوسط المجتمع:**

$$\hat{U}_X=U_{\overline{X}}\mp d=18{,}85\mp 1{,}21$$

$$P(18{,}85-1{,}21 \leq \hat{U}_X \leq 18{,}85+1{,}21)=0{,}95$$

$$P(17{,}64 \leq \hat{U}_X \leq 20{,}06)=0{,}95$$

1-2- فترة الثقة حول المتوسط عندما يكون التباين غير معلوم:

بالرغم من أنه في بعض الأحيان يكون المتوسط غير معلوم والانحراف المعياري للمجتمع (δ_x) معلوم، إلا أنه في الحقيقة وفي كثير من الحالات يكون الانحراف المعياري للمجتمع (δ_x)غير معلوم أيضا، وإذا أردنا تكوين فترة ثقة حول متوسط المجتمع ويكون الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، فإن المدخل المناسب هو تقدير الانحراف باستخدام (S) وهو الانحراف المعياري للعينة، وإذا كان حجم العينة كبير نسبيا ($n \geq 30$) يتم استبدال الانحراف المعياري للمجتمع بالانحراف المعياري للعينة عند تقديرنا للمجتمع. وبالتالي تظهر لنا عدة حالات يمكن إيجازها فيما يلي:

- ✓ **التوزيع الطبيعي:** (المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري غير معلوم يعوض ب(S)، حجم العينة ($n \geq 30$))

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp d$$

$$U_{\overline{X}} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta_{\overline{X}}$$

- ✓ **توزيع ستيودنت:** (المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري غير معلوم يعوض ب(S)، حجم العينة($n<30$)):

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp d$$

$$U_{\overline{X}} \mp t_{\left(V-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \delta_{\overline{X}}$$

حيث أن: (V) درجة الحرية، (k) عدد المعلمات المقدرة، (n) حجم العينة

$$V=n-k=n-1$$

$$P\left(U_{\overline{X}}-d \leq \hat{U}_X \leq U_{\overline{X}}+d\right)=1-\alpha$$

$$P\left(U_{\overline{X}}-t_{\left(v-\frac{\alpha}{2}\right)}.\,\delta_{\overline{X}}\leq \hat{U}_X\leq U_{\overline{X}}+t_{\left(v-\frac{\alpha}{2}\right)}.\,\delta_{\overline{X}}\right)=1-\alpha$$

✓ **نظرية شيشيف:** (المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري غير معلوم يعوض ب(S)، حجم العينة($n<30$)):

$$\hat{U}_X=U_{\overline{X}}\mp k.\,\delta_{\overline{X}}$$

$$P\left(U_{\overline{X}}-k.\,\delta_{\overline{X}}\leq \hat{U}_X\leq U_{\overline{X}}+k.\,\delta_{\overline{X}}\right)=1-\alpha$$

والجدول التالي يلخص كل الحالات السابقة بالتفصيل:

الجدول رقم(1): تقدير متوسط المجتمع تبعا لتوزيع المعاينة ومعلومية وعدم معلومية (δ_X)

قانون المجتمع	التباين δ_X^2	حجم العينة	الانحراف المعياري	قانون العينة
معلوم التوزيع (موزعا طبيعيا)	معلوم	$n\geq 30$ أو $n<30$	$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta_X}{\sqrt{n}}$ $\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta_X}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	تتبع توزيع طبيعي
	غير معلوم	$n\geq 30$	$\delta_{\overline{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$ $\delta_{\overline{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	تتبع توزيع طبيعي
		$n\leq 30$	$\delta_{\overline{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$ $\delta_{\overline{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	تتبع توزيع ستيودنت
المجتمع غير معلوم التوزيع	معلوم التباين	$n\geq 30$	$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta_X}{\sqrt{n}}$	تتبع توزيع طبيعي

	غير معلوم التباين	$n < 30$	$\delta_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\delta_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	نظرية تشبيف $k = \sqrt{\frac{1}{\propto}}$

مثال1:

أخذت عينة عشوائية حجمها 144 بمتوسط 300 وانحراف معياري 100 من مجتمع به 5000 مفردة، قدر متوسط المجتمع بفترة (مجال الثقة عند 95%)؟

الحل:

$$c = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$$

$$n = 144$$

$$N = 500$$

$$U_{\overline{X}} = 300$$

تباين غير معلوم $\delta_{\overline{X}} = S = 100$

بما أن المجتمع غير معلوم التوزيع وغير معلوم التباين، وحجم المجتمع $(n > 30)$ فإن توزيع المعاينة يتبع توزيع طبيعي.

- **تقدير متوسط المجتمع:**

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp d$$

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}}$$

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات: $\frac{n}{N}=\frac{144}{5000}=0,029$

$\frac{n}{N}<0,05$ لا نستخدم معامل التصحيح

$$\delta_{\overline{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}=\frac{100}{144}=8,33$$

من جداول التوزيع الطبيعي نجد:

$$Z_{95\%}=Z_{1-\frac{0,05}{2}}=Z_{0,975}=Z_{0,475}=1,96$$

$$\hat{U}_{X}=U_{\overline{X}}\mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\delta_{\overline{X}}$$

$$\hat{U}_{X}=300\mp(1,96*8,33)$$

$$\hat{U}_{X}=300\mp16,32$$

$$P(300-16.32<\hat{U}_{X}<300+16,32)=0,95$$

$$P(283,68<\hat{U}_{X}<316,32)=0,95$$

مثال 2:

أخذت عينة عشوائية مكورة من 25 *مفردة* بمتوسط 80 وانحراف معياري 30 من مجتمع موزع طبيعي مكون من 1000 مفردة، قدر متوسط المجتمع عند درجة ثقة 95% ؟

الحل: المجتمع موزع طبيعيا

$$n=25$$

$$V=n-1=24$$

$$U_{\overline{X}}=80$$

$$N=1000$$

$S = 30$

$c = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$

- **إيجاد قيمة t عند معنوية $\propto = 5\%$:**

$t_{\left(v.\frac{\propto}{2}\right)} = ?$

$t_{\left(24.\frac{0,05}{2}\right)} = 2,064$

حسب نظرية التقدير للمتوسطات: مادام المجتمع موزع طبيعيا، وتباينه غير معلوم، و $(n < 30)$ ، فإن توزيع المعاينة يتبع توزيع ستيودنت.

- **تقدير المجتمع باحتمال 0,95:**

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp t_{\left(v-\frac{\alpha}{2}\right)} . \delta_{\overline{X}}$$

من جداول ستيودنت:

$t_{\left(24.\frac{0,05}{2}\right)} = 2,064$

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات:

$$\frac{n}{N} = \frac{25}{1000} = 0,025 < 0,05$$

لا نستخدم معامل تصحيح

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{25}} = 6$$

$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp d$

$\hat{U}_X = 80 \mp (2,064)(6)$

$\hat{U}_X = 80 \mp 12,38$

د. شيروف فضيلة

$$P(80 - 12{,}38 < Û_X < 80 + 12{,}38) = 0{,}95$$

$$P(67{,}62 < Û_X < 92{,}38) = 0{,}95$$

مثال 3:

في تجربة على 12 من رواد الفضاء في مجال يحاكي انعدام الوزن، وجد أن متوسط ضربات القلب لهم 27,33 دقة بانحراف معياري 4,28 دقة في الدقيقة، أحسب أقصى خطأ في تقدير متوسط المجتمع بدرجة معنوية 1%؟

الحل: المجتمع غير معلوم التوزيع

$$S = 4{,}28\,,\ U_{\overline{X}} = 27{,}33 \qquad n = 12$$

$$N = ? \qquad \propto = 1\%$$

حسب نظرية التقدير: ما دام المجتمع غير معلوم التوزيع وغير معلوم التباين، وحجم العينة $(n < 30)$

← فإن توزيع المعاينة يتبع نظرية شبشيف:

$$d = k.\delta_{\overline{X}}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{\propto}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}01}} = 10$$

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات : $\frac{n}{N} < 0{,}05$ لا نستخدم معامل تصحيح

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}28}{\sqrt{12}} = 1{,}23$$

$$d = 10 * 1{,}23 = 12{,}3$$

$$Û_X = 27{,}33 \mp 12{,}3$$

$$(27{,}33 - 12{,}3 < Û_X < 27{,}33 + 12{,}3)$$

$$(15{,}03 < \hat{U}_X < 39{,}63) = 0{,}99$$

1-3- حساب حجم العينة:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\bar{X}}$$

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{\delta_X}{\sqrt{n}}$$

$$d . \sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_X$$

$$\sqrt{n} = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_X}{d}$$

$$\boldsymbol{n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_X}{d}\right)^2}$$

مثال: يرغب صاحب مصنع في تقدير حجم العينة حتى يتأكد باحتمال 0,95 أنه لم يكن مخطئ بـ 5 وحدات معبية، إذا علم أن انحرافه المعياري هو 20 وحدة.

الحل:

$$c = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$$

$$\delta_X = 20$$

$$d = 5$$

من جداول التوزيع الطبيعي: $Z_{95\%} = 1{,}96$

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_X}{d}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 * 20}{5}\right)^2$$

$$n = 61{,}4 \approx 61$$

2- نظرية التقدير للنسب في مجتمع واحد:

نظرية التقدير

إذا كانت الإحصائية $U_{P'}$ (نسبة المعاينة) هي متوسط المعاينة في عينة حجمها n مسحوبة من مجتمع ذو حدين، حيث P هي نسبة المجتمع والتي يمكن تقديرها في حدود ثقة معينة بالمعادلة الآتية:

$$\hat{P} = U_{P'} \mp d$$

$U_{P'}$: نسبة المعاينة

P: نسبة المجتمع

$\hat{P}$: تقدير نسبة المجتمع

d : الخطأ في تقدير نسبة المجتمع

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{P'}$$

مثال:

في دراسة لاختبار صلاحية إحدى الطرق لعلاج مرض ما، أخذت عينة مكونة من 400 شخص حيث أبدى 136 شخص عدم شعورهم بالراحة أثناء العلاج. قدر فترة الثقة لنسبة المجتمع عند ثقة %90؟

$$P = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}} \qquad P = \frac{136}{400} = 0{,}34$$

$$q = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$$

$$n = 400$$

$$\delta_{P'} = \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}34 * 0{,}66}{400}}$$

$$\delta_{P'} = 0{,}037$$

$$\hat{P} = 0{,}34 \mp 1{,}64 * 0{,}041$$

$$\hat{P} = 0{,}34 \mp 0{,}067$$

$$P\left(0{,}273 \leq \hat{P} \leq 0{,}407\right) = 0{,}90$$

- **إيجاد حجم العينة في حالة النسب:**

$$d = Z.\delta_{P_i}$$

$$d = Z.\sqrt{\frac{Pq}{n}}$$

$$\frac{d}{Z} = \sqrt{\frac{Pq}{n}} \rightarrow \frac{d^2}{Z^2} = \frac{Pq}{n}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{Pq.Z^2}{d^2}}$$

مثال: يرغب صاحب مصنع للألعاب الالكترونية تقدير نسبة الإنتاج المعيب في حدود 0,1 بدرجة ثقة 95%. ما هو الحد الأدنى لحجم العينة المطلوب إذا كانت الخبرة السابقة تشير إلى أن نسبة العيب في إنتاج الألعاب الكهربائية هو 0.2؟

d=0.1 p=0.2 c= %95 $\Rightarrow Z_{95\%} = 1{,}96$

P: نسبة المجتمع، d : الخطأ في تقدير نسبة المجتمع

$$\boldsymbol{n = \frac{Pq.Z^2}{d^2} = \frac{(0.2)(0.8).(1.96)^2}{(0.1)^2} = 61}$$

3- نظرية التقدير للفروق بين المتوسطات لمجتمعين:

إن المتغير العشوائي $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ الذي يشير إلى الفرق في الأوساط الحسابية لعينتين، والذي أخذت عينته الأولى (n_1) من المجتمع الأول والعينة الثانية (n_2) من المجتمع الثاني، فإنه يمكننا تقدير فترة الثقة للفرق بين مجتمعين كما يلي:

$$\hat{U}_{X_1-X_2} = \overline{U}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} \mp d$$

❖ **قيمة d في حالة توزيع طبيعي:**

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$$

❖ **قيمة d في حالة توزيع ستيودنت:**

$$d = t_{(V.\propto)} . \delta_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$$

$$V = n_1 + n_2 - k$$

❖ **قيمة d في حالة توزيع تشبشيف:**

$$d = k . \delta_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{\propto}}$$

❖ **الانحراف المعياري في حالة التوزيع الطبيعي:**

✓ **إذا كان δ_X معلوم:**

$$\delta_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{{\delta_{X_1}}^2}{n_1} + \frac{{\delta_{X_2}}^2}{n_2}}$$

✓ **إذا كان δ_X مجهول:**

$$\delta_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}$$

❖ **الانحراف المعياري في حالة توزيع ستيودنت:**

$$\delta_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1){S_1}^2 + (n_2 - 1){S_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

مثال1:

نظرية التقدير

عينة من 160 بطارية متوسط عمرها الإنتاجي 1400 سا بانحراف معياري 120 سا، وعينة أخرى من صنف B مكونة من 200 بطارية متوسط عمرها الإنتاجي 1200 سا بانحراف معياري 80 سا. أوجد عند 95% حدود الثقة للفرق بين متوسط العمر الانتاجي للمجتمعين A مقارنة بـ B؟

الحل: معطيات المثال

الصنف B	الصنف A
$n_B = 150$	$n_A = 200$
$U_{\overline{X}_B} = 1400$	$U_{\overline{X}_A} = 1200$
$S_B = 120$	$S_A = 80$

$c = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$

حسب نظرية التقدير ما دام:

- ✓ الانحراف المعياري للمجتمعين δ_{X_1} و δ_{X_2} مجهولين يعوضان ب S_1 و S_2
- ✓ المجتمع غير معلوم التوزيع وحجم العينتين n_1 و n_2 أكبر من 30

فإن تقدير متوسط الفرق بين المجتمعين يخضع للتوزيع الطبيعي. ومنه:

$$\hat{U}_{X_A-X_B} = U_{\overline{X}_A-\overline{X}_B} \mp d$$

$$\boldsymbol{d = Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}}$$

حسب نظرية المعاينة للفروق بين المتوسطات:

$$U_{\overline{X}_A-\overline{X}_B} = U_{\overline{X}_A} - U_{\overline{X}_B} = 1400 - 1200 = 200$$

$$\delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B} = \sqrt{\frac{{S_A}^2}{n_A} + \frac{{S_B}^2}{n_B}}$$

$$\delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B} = \sqrt{\frac{120^2}{150}+\frac{80^2}{200}} = 11{,}31$$

من جداول التوزيع الطبيعي: $Z_{95\%} = 1{,}96$

$$\boldsymbol{d = 1,96 * 11,31 = 22,17}$$

تقدير متوسط الفرق بين مجتمعين:

$$\hat{U}_{X_A-X_B} = 200 \mp 22{,}17$$

$$p\left(200-22{,}17 \leq \hat{U}_{X_A-X_B} \leq 200+22{,}17\right) = 0.95$$

$$P\left(177{,}83 \leq \hat{U}_{X_A-X_B} \leq 222{,}17\right) = 0{,}95$$

مثال 2:

إذا كان معدل أجور العمال في مصانع الأسمنت 1750 دولار بانحراف معياري 5 وذلك لعينة مكونة من 25 عامل، وكان معدل أجور العمال في مصنع الحديد والصلب 1500 دولار بانحراف معياري 3 لعينة مكونة من 20 عامل، إذا علمت أن المجتمع موزع طبيعيا قدر فترة الثقة 90% للفرق بين متوسطي العمال في مصنع الاسمنت مقارنة بالمصنع الحديد والصلب؟

الحل: معطيات المثال

المصنع A (الاسمنت)	المصنع B(الحديد)
$n_A = 25$	$n_B = 20$
$U_{\overline{X}_A} = 1750$	$U_{\overline{X}_B} = 1500$
$S_A = 3$	$S_B = 5$

$$c = 90\% \rightarrow \alpha = 10\%$$

حسب نظرية التقدير ما دام:

- ✓ الانحراف المعياري للمجتمعين δ_{X_1} و δ_{X_2} مجهولين يعوضان ب S_1 و S_2
- ✓ المجتمع موزع طبيعيا، وحجم العينتين n_1 و n_2 أقل من 30

فإن تقدير متوسط الفرق بين المجتمعين يخضع للتوزيع ستيودنت. ومنه:

$$\hat{\mathrm{U}}_{X_A-X_B}=\mathrm{U}_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}\mp d$$

$$d=t_{(V.\propto)}.\delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}$$

$$V=n_1+n_2-k$$

حسب نظرية المعاينة للفروق بين المتوسطات:

$$\mathrm{U}_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}=\mathrm{U}_{\overline{X}_A}-\mathrm{U}_{\overline{X}_B}=1750-1500=250$$

$$\delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}=\sqrt{\frac{(n_1-1){S_1}^2+(n_2-1){S_2}^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$\delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}=\sqrt{\frac{(25-1)5^2+(20-1)3^2}{25+20-2}}=4.2$$

من جداول توزيع ستيودنت:

$$V=n_1+n_2-k$$

$$V=25+20-2=43$$

$$t_{(V.\propto)}=t_{(43;0.95)}=\mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{d=(2)(4.2)=2.52}$$

تقدير متوسط الفرق بين مجتمعين:

$$\hat{\mathrm{U}}_{X_A-X_B}=\mathbf{250\mp 2.52}$$

$$p\left(250-2.52 \leq \hat{U}_{X_A-X_B} \leq 250+2.52\right) = 0.95$$

$$P\left(247.48 \leq \hat{U}_{X_A-X_B} \leq 252.52\right) = 0,95$$