## المحور الأول: المعاينة الإحصائية وتوزيعها

### تمهيد:

بعدما تطرقنا فيما سبق للعينات وطرق اختيارها والتي تعد كما قلنا ركنا أساسي في دراسة الإحصاء الاستدلالي الذي يستند في حقيقته إلى التوصل على استقراءات واستنتاجات عن المجتمع المدروس من خلال بيانات جزئية توفرها العينة، بمعنى أخر إن الاستدلال الإحصائي يقود في النهاية للحصول على نتائج واستنتاجات عن معلمات المجتمع الإحصائي من خلال معرفة المؤشرات الإحصائية التي يتم الحصول عليها من واقع مشاهدات العينة.

### 1- مفهوم المعاينة الإحصائية:

في ضوء ما تقدم، تبين لنا أن دراسة أسلوب العينات يساعدنا على الربط بين العينة والمجتمع حيث يتم من خلال أسلوب العينات تقدير بعض المؤشرات الإحصائية والتي يطلق عليها أحيانا بالإحصاءات (Statistics)، ومن الأمثلة على هذه المؤشرات الوسط الحسابي (X) والتباين ($S^2$) والنسبة (P)....إلخ. وللحصول على تقديرات دقيقة من واقع مشاهدات العينة يمكن تعميمها على المجتمع المدروس، ينبغي الاهتمام بدراسة أسلوب العينات وطرق اختيارها بهدف الحصول على إحصاءات دقيقة يمكن اعتمادها لأغراض اتخاذ القرارات أو التنبؤ بقيم معلمات المجتمع.[1]

### 2- توزيع المعاينة:

إن التوزيع الاحتمالي لجميع القيم الممكنة لاحصاءة العينة يطلق عليه تسمية توزيع المعاينة. إن هذا التوزيع الاحتمالي يخدم غرضين هما:[2]

أ- يساعد في الإجابة على الاحتمالات المتعلقة باحصاءة العينة.

ب- يعطي الجانب النظري الذي يبرر صحة تطبيق أساليب الاستنتاج الإحصائي.

حيث أن أغلب الإحصاءات استخداما في مجال الاستنتاج الإحصائي هي متوسط العينة وتباينها ونسبة عناصرها التي تحمل صفة معينة، وبالتالي سوف نتناول في هذا المحور توزيعات المعاينة لكل

---

[1]- حسن ياسين طعمة، ايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص 179

[2]- علي عبد السلام العماري، علي حسن العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 412.

من متوسط العينة ونسبة عناصرها التي تحمل صفة معينة، وبالتالي يعد مفهوم توزيعات المعاينة مدخلا مهما لفهم موضوع الإحصاء الاستدلالي، حيث يستخدم توزيع إحصاءات العينة بشكل واسع في موضوع اختبار الفرضيات الإحصائية.

ويعرف توزيع المعاينة بأنه عبارة عن: "توزيع كافة القيم المحتملة التي يمكن افتراضها باحصاءة ما محسوبة على أساس عينات مختلفة بنفس الحجم اختيرت عشوائيا من نفس المجتمع.

**2-1- توزيع المعاينة للوسط الحسابي لعينة مسحوبة من مجتمع طبيعي:**

إن من أهم توزيعات المعاينة هو توزيع متوسط العينة، حيث ما يهمنا هو معرفة صيغة هذا التوزيع ومتوسطه وتباينه $(\delta_{\bar{x}},U_{\bar{x}})$. فإذا كانت n تمثل عينة عشوائية فإن متوسط العينة يرمز لها ب $U_{\bar{x}}$ وتباينها بالرمز $\delta_{\bar{x}}$

فالعينة العشوائية هي عدد العينات المختلفة ذات الحجم $n$ المسحوبة من مجتمع محدود $N$ أو غير محدود، و هناك حالتين لسحب العينة إما بإرجاع أو بدون إرجاع.

**أ) حالة السحب دون إرجاع:**

$$C_n^K = \frac{n!}{K!(n-K)!} \Longrightarrow C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

**ب) حالة السحب بإرجاع:**

$$N^n$$

ولكل عينة مختارة نفس الاحتمال يقدر في:

**الحالة الأولى:**

$$p = \frac{1}{C_N^n}$$

**والحالة الثانية:**

$$P = \frac{1}{N^n}$$

**مثال1:** كم عينة حجمها 2 يمكن تكونها من مجتمع يتكون من 12 عنصر بالإرجاع أو بدون إرجاع.

**1- سحب بدون إرجاع:** $n = 2$ $N = 12$

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{12 * 11 * 10!}{2! * 1 * 10!} = 66 \text{ عينة}$$

ومنه عدد العينات الممكن سحبها من هذا المجتمع هي 66 عينة وكل عينة باحتمال $P = {}^{1}/_{66}$

**2- سحب بالارجاع:**

$$N^{n} = 12^{2} = 144$$

ومنه عدد العينات الممكن سحبها من هذا المجتمع هي 144 عينة وكل عينة باحتمال $P = \frac{1}{144}$

**مثال2:**

أوجد جميع العينات الممكنة التي حجمها 3 والمسحوبة بدون إرجاع من المجتمع التالي: {a,b,c,d,e}

**الحل:** $n = 3$ $N = 6$

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

عدد العينات الممكن سحبها دون إرجاع هي 10 ويمكن تمثيلها كالأتي:

Ω = {(a,b,c),(a,b,d) ,(a,b,e),(a,c,d), (b,c,d),(d,b,e),(c,d,e),(a,c,e),(b,c,e)}

**تمرين 1:**

لدينا مجتمع يتكون من {3,5,7,9,11}

**المطلوب :**

1- حساب متوسط هذا المجتمع وانحرافه المعياري.

2- أوجد جميع العينات الممكنة ذات حجم (2) في حالة السحب دون إرجاع.

3- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $\bar{X}_i$.

4- أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمعاينة $(\delta_{\bar{x}},\mathrm{U}_{\bar{x}})$.

**الحل:** $X_i$: متغير عشوائي يمثل عناصر المجتمع

$$X_i = \{3, 5, 7, 9, 11\}$$

$N = 5$: حجم المجتمع

$n = 2$: حجم العينة

**1- إيجاد متوسط المجتمع $\mathrm{U}_{X_i}$ وانحرافه المعياري $\delta_{Xi}$ :**

$$\mathrm{U}_{X_i} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{3+5+7+9+11}{5} = 7$$

ومنه متوسط المجتمع هو: $\mathrm{U}_{X_i} = \mathbf{7}$

$$\delta_{X_i} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \mathrm{U}_{Xi})}{N}}$$

$$\delta_{Xi} = \sqrt{\frac{(3-7)^2+(5-7)^2+(7-7)^2+(9-7)^2+(11-7)^2}{5}} = \sqrt{8}$$

ومنه الانحراف المعياري هو: $\delta_{Xi} = \mathbf{2,828}$

2- **ايجاد عدد العينات الممكنة الحجم عينة $n = 2$ دون إرجاع** :

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

ويمكن تمثيل هذه العينات 10المسحوبة في المجموعة التالية:

$$\Omega = \{ (3,5)\ (3,7)\ (3,9)\ (3,11)\ (5,7)\ (5,9)\ (5,11)\ (7,9)\ (5,7)\ (5,9)\ (5,11)\ (7,9)\ (7,11)\ (9,11)\}$$

بعد تحديد العينات نقوم بحساب متوسط كل عينة لينتج لدينا متغير عشوائي جديد يمثل عناصر المعاينة $(\bar{X}_i)$: فمثلا متوسط العينة الأولى (3,5) هو $\frac{\sum x_i}{n} = \frac{3+5}{2} = 4$ وهكذا مع بقية العينات المتبقية.

$$\bar{X}_i = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

**3- إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي:**

| $\bar{X}_i$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{\bar{X}_i}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

**نقول عن $\overline{Xi}$ أنه متغير عشوائي إذا تحقق شرطان:**

**الشرط الأول:** $P_{\bar{X}_i} \geq 0$

و هذا الشرط محقق لأن كل قيمه من قيم الاحتمال أكبر تماما من (0)

**الشرط الثاني:** $\sum P_{\bar{X}_i} = 1$

$$\sum P_{\bar{X}_i} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

و هذا الشرط أيضا محقق ومنه يمكن حساب متوسط المتوسطات أو متوسط المعاينة

- **متوسط المعاينة** $\cup_{\overline{Xi}}$:

$$E(\overline{Xi}) = \sum P_{\overline{Xi}} . \overline{Xi}$$

$$E(\overline{Xi}) = 4.\frac{1}{10} + 5.\frac{1}{10} + 6.\frac{2}{10} + 7.\frac{2}{10} + 8.\frac{2}{10} + 9.\frac{1}{10} + 10.\frac{1}{10}$$

$$E(\overline{Xi}) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{12}{10} + \frac{14}{10} + \frac{16}{10} + \frac{9}{10} + \frac{10}{10} = 7$$

ومن $\boldsymbol{E(\overline{Xi}) = \cup_{\overline{Xi}} = 7}$

- **تباين المعاينة** $\boldsymbol{\delta^2_{\bar{X}}}$ :

$$\delta^2_{\bar{X}} = \sum_{N}^{n} \bar{X}_i^{\ 2} * P_{Xi} - E^2(\bar{X})$$

$$\delta^2_{\bar{X}} = \left(\frac{16}{10} + \frac{25}{10} + \frac{72}{10} + \frac{98}{10} + \frac{128}{10} + \frac{81}{10} + \frac{100}{10}\right) - (7)^2 = 3$$

- **الانحراف المعياري للمعاينة $\delta_{\overline{X}}$:**

$$\delta_{\overline{X}} = \sqrt{\delta^2_{\overline{X}}} = \sqrt{3} = 1,732$$

من خلال ما سبق نستنتج أن:

$$U_{\overline{X}} = U_X = 7$$

**لكن**

$$\delta_{\overline{X}} \neq \delta_X$$

**نظرية المعاينة للمتوسطات:**

إذا كانت $X_i$ متغير عشوائي يمثل عناصر المجتمع(N) ويخضع لتوزيع معين، أختيرت عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها ( n)، و كان $\overline{X_i}$ متغير عشوائي يمثل عناصر المعاينة المسحوبة من نفس المجتمع، فإن متوسط المعاينة هو متوسط المجتمع:

$$U_{\overline{X_i}} = U_X$$

وتباين المعاينة هو تباين المجتمع قسمة حجم العينة إذا كانت النسبة: $\frac{n}{N} \leq 0,05$

$$\delta^2_{\overline{X}} = \frac{\delta^2 X}{n} \quad \Longrightarrow \quad \delta_{\overline{X_i}} = \frac{\delta_X}{\sqrt{n}}$$

أما إذا كانت النسبة $\frac{n}{N} > 0,05$ فإننا نطبق معامل التصحيح المقدر ب: $\frac{(N-n)}{(N-1)}$ .

ويصبح الانحراف المعياري للمعيانة كما يلي:

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{\delta_X}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

**نرجع إلى التمرين السابق:** أو شيء نحسب النسبة $\frac{n}{N}$

$$\frac{n}{N}=\frac{2}{5}=0,4$$

بمأن النسبة $(0,4\ \geq 0,05)$ فإننا نطبق معامل التصحيح عند حساب الانحراف المعياري للمعاينة.

وحسب المعلومات السابقة:

$$\delta_X = 2,282$$

$$\delta_{\overline{X}} = 1,732$$

وبالتالي الانحراف المعياري للمعاينة:

$$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta_X}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{\overline{X}}}=\frac{\mathbf{2,282}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\sqrt{\frac{\mathbf{5-2}}{\mathbf{5-1}}}=1.73$$

**ومنه نظرية المعاينة محققة.**

**تمرين 2:** مجتمع مكون من 12000 عنصر بمتوسط 100 وانحراف معياري $U_X = 60$، أوجد المتوسط والانحراف المعياري للمعاينة عندما يكون حجم العينة 100، ثم عندما يكون حجم العينة 20 ؟

**الحل:**

حجم المجتمع: $N = 12000$

متوسط المجتمع: $U_{X_i} = 100$

الانحراف المعياري للمجتمع: $\delta_{X_i} = 60$

1) **إيجاد المتوسط والانحراف المعياري للمعاينة عندما يكون حجم العينة n=100:**

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات، ما دام حجم العينة n مسحوب من نفس المجتمع N فإن:

- **متوسط المعاينة:**

$$U_{\overline{X_i}} = U_{X_i} = 100$$

- **الانحراف المعياري للمعاينة :**

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{12000} = 0{,}008 < \mathbf{0,05}$$

بعد حساب النسبة $\frac{n}{N}$ وجدناها أقل من 0,05 فإننا في هذه الحالة لا نستخدم معامل التصحيح في حساب الانحراف المعياري ومنه:

$$\delta_{\overline{X_i}} = \frac{\delta_{X_i}}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6$$

**2) إيجاد المتوسط والانحراف المعياري للمعاينة عندما يكون حجم العينة n=900:**

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات فإن متوسط المعاينة:

$$U_{\overline{X_i}} = U_{X_i} = 100$$

أما الانحراف المعياري للمعاينة:

$$\frac{n}{N} = \frac{900}{12000} = 0{,}075 > \mathbf{0,05}$$

**ما دامت النسبة $\frac{n}{N}$ أكبر من $\mathbf{0,05}$ نستخدم معامل التصحيح في حساب الانحراف المعياري :**

$$\boldsymbol{\delta_{\overline{X}} = \frac{\delta_X}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}} = \frac{60}{\sqrt{900}} \sqrt{\frac{12000-900}{12000-1}} = 1,92.}$$

**نظرية النهاية المركزية:**

تعتبر هذه النظرية أساسية في علم الإحصاء والتي تعطي التوزيع العيني للمتوسط وهي كالتالي:

إذا افترضنا أننا أخذنا عينة عشوائية n من المجتمع N لها متوسط $U_{\overline{X_i}}$ وانحراف معياري $\boldsymbol{\delta_{\overline{Xi}}}$ فإن المتغير العشوائي $\overline{X_i}$ الذي يمثل المعاينة يمكن تحويله إلى قيمة معيارية مقدرها:

$$Z = \frac{\overline{X_i} - U_{\overline{Xi}}}{\delta_{\overline{Xi}}}$$

**إذا تحقيق ما يلي:**

1) $\overline{X_i}$ : متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، إذا كان المجتمع موزع طبيعيا

2) $\overline{X_i}$: م.ع يتبع توزيع طبيعي، إذا كانت حجم العينة $n \geq 30$ والمجتمع غير معلوم التوزيع.

**مثال3 :**

نسبة ذكاء في مجتمع ما يكون له توزيع طبيعي بمتوسط 100 وانحراف معياري $\delta$ = 10 فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها n= 16 من هذه المجتمع، فما إحتمال أن يقع متوسط العينة $\overline{X}$ بين [95–105]؟

**الحل:** المجتمع موزع طبيعيا

$$N=? \qquad n=16 \qquad \cup_{X_i}=100 \qquad \delta_{X_i}=10$$

- **حساب احتمال أن يكون متوسط المعاينة محصور ما بين 95 و 105:**

$$P(95 \leq \overline{X}_i \leq 105)=\ ?$$

**حسب نظرية النهاية المركزية :**

مادام المجتمع موزع طبيعيا فإن $\overline{X}_i$ تتبع التوزيع الطبيعي مهما كان حجم العينة، وبالتالي يمكن تحويل المتغير العشوائي للمعاينة $\overline{X}_i$ إلى قيمة معيارية Z كما يلي:

$$\overline{X}_i \Rightarrow Z=\frac{\overline{X}_i-\cup_{\overline{Xi}}}{\delta_{\overline{Xi}}}$$

$$P(95 \leq \overline{X}_i \leq 105)=P\left(\frac{95-\cup_{\overline{Xi}}}{\delta_{\overline{Xi}}} \leq Z \leq \frac{105-\cup_{\overline{Xi}}}{\delta_{\overline{Xi}}}\right)$$

- **إيجاد متوسط المعاينة وانحرافها المعياري:** حسب نظرية المعاينة للمتوسطات

$$\cup_{\overline{X}_i}=\cup_{X_i}=100$$

**ملاحظة:**

في حالة عدم معرفة حجم المجتمع N نفرض $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ ولا نستعمل معامل التصحيح

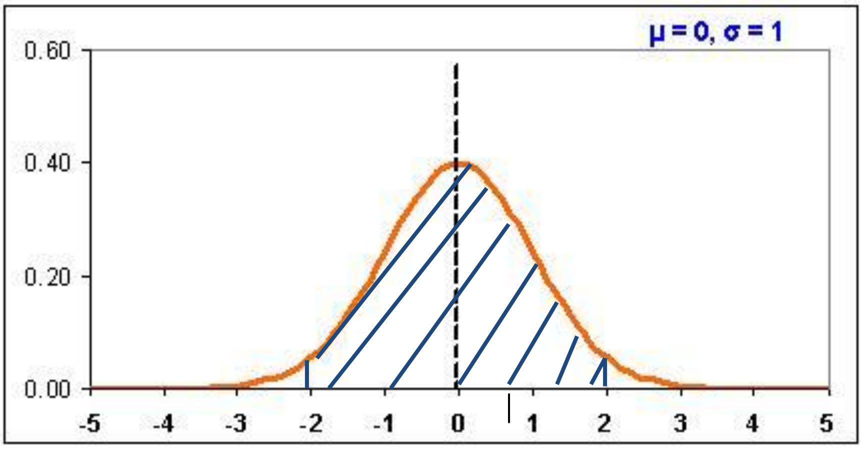
وبالتالي الانحراف المعياري للمعاينة هو كالتالي:

$$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta_{X_i}}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{16}}=2{,}5$$

$$P\left(\frac{95-100}{2{,}5} \leq Z \leq \frac{105-100}{2{,}5}\right)=P(-2 \leq Z \leq 2)$$

**من جدول التوزيع الطبيعي نجد:**

$$P(Z=-2)=P(Z=2)=04772$$




ومنه :

$$P(-2\leq Z\leq 2)=P(Z=-2)+P(Z=2)=(0{,}4772)*2=0{,}9544$$

**مثال 2:**

لدى بنك محلي صغير 1450 حساب إدخار برصيد متوسط قدر بـ 3000 دولار وانحراف معياري 1200 دولار ، إذا أخذ البنك عينة من 100 حساب. ما احتمال أن يكون متوسط مدخرات هذه الحسابات أقل من 2800 دولار ؟

**الحل:** المجتمع غير معلوم التوزيع

$$N=1450$$

$$n=100$$

$$U_{X_i}=3000\$$$

$$\delta_{X_i}=1200\$$$

- **حساب احتمال أن يكون متوسط مدخرات لهذه الحسابات أقل من 2800$:**

$$P(\overline{X}_i\leq 2800\$)=?$$

**حسب نظرية النهاية المركزية :**

ما دام المجتمع مجهول التوزيع وحجم العينة n>30 فإن المتغير العشوائي $\overline{X}_i$ يتبع توزيع طبيعي ومنه:

$$\overline{X}_i \to Z = \frac{\overline{X}_i - U_{\overline{Xi}}}{\delta_{Xi}}$$

$$P(\overline{X}_i \leq 2800) = P\left(Z \leq \frac{2800 - U_{\overline{Xi}}}{\delta_{Xi}}\right)$$

**حسب نظرية المعاينة المتوسطات فإن:**

- **متوسط المعاينة:**

$$U_{\overline{X}_i} = U_{Xi} = 3000$$

- أما **الانحراف المعياري للمعاينة** : نحسب أولا النسبة

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{1450} = 0{,}06 > 0{,}05$$

←هنا نستخدم معامل التصحيح لأن النسبة أكبر من 0,05 ومنه:

$$\delta_{\overline{X}i} = \frac{1200}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{1450-100}{1450-1}} = 115{,}82$$

$$P\left(Z \leq \left(\frac{2800-3000}{115{,}82}\right)\right) = P(Z \leq -1{,}72)$$

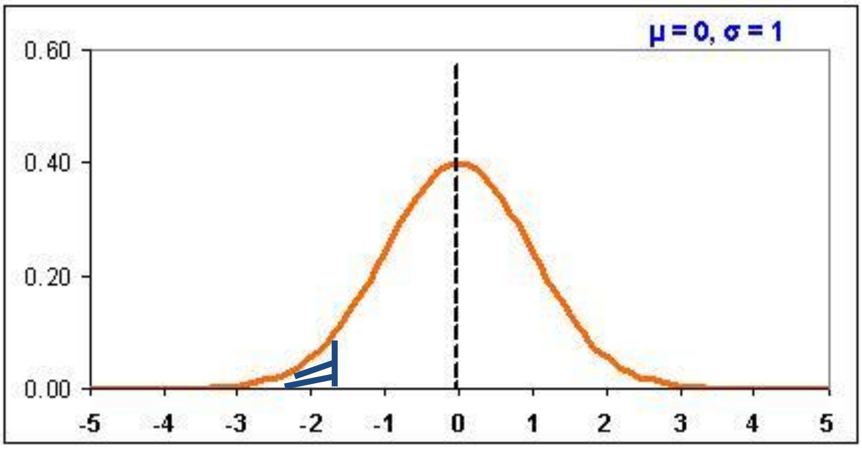
**من جدول التوزيع الطبيعي نجد :**

$$P\ (Z = -1{,}72) = P\ (1{,}72) = 0{,}4573$$

$$P(Z \leq -1{,}72) = 0{,}5 - P(Z = -1{,}72)$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4573$$

$$P(Z \leq -1{,}72) = 0{,}0427$$




## 2-2- توزيع المعاينة للنسبة من مجتمع واحد:

**نظرية المعاينة للنسب:**

ليكن $X_i$ م.ع يمثل عناصر مجتمع ما موزع طبيعيا ، حيث P تمثل نسبة مفردات هذا المجتمع، ولتكن *n* عينة مسحوبة من نفس المجتمع وبالتالي نتعامل مع متغير جديد هو 'P (متغير عشوائي يمثل نسبة المعاينة) وبالتالي نحصل على توزيع إحصائي جديد ($U_{P\prime}$ و $\delta_{P\prime}$ ) حيث هذه المعالم تساوي:

$$U_{P'} = U_P = P$$

$$si\ \frac{n}{N} \leq 0,05 \quad \Rightarrow \quad \delta^2_{P'} = \frac{pq}{n}\ ;\ \delta_{P'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$sinon \quad \frac{n}{N} > 0,05 \rightarrow \delta_{P'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

*علما أن:* $P + q = 1$

← ما دام المجتمع موزعا طبيعيا فإنه يمكن تحويل نسبة المعاينة $P'$ إلى قيمة معيارية $Z$ قيمتها:

$$Z = \frac{P' - U_{P\prime}}{\delta_{P\prime}}$$

**مثال:** في دراسة لاختبار صلاحية إحدى طرق لعلاج مرض معين أخذت عينة مكونة من 400 شخص من بين 8200 شخص أبدى 341 من الأشخاص عدم شعورهم براحة أثناء العلاج ما هي نسبة المعاينة وانحراف معياري للمعاينة

- ما هو احتمال أن يكون *أكبر من* 38% من الأشخاص الذين شعروا بعدم الراحة أثناء العلاج؟.
- ما هو احتمال أن يكون أقل من 68% من الأشخاص الذين شعروا بالراحة ؟

**الحل:**

$$N = 800$$

$$n = 400$$

$$P = \mathrm{U}_P = 0{,}34$$

$P$: م.ع يمثل نسبة الأشخاص الذين لا يشعرون بالراحة

$$q = 1 - P \ = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$$

- **حساب نسبة المعاينة والانحراف المعياري :**

حسب نظرية المعاينة للنسب

$$\mathrm{U}_{P'} = P = 0{,}34$$

أولا نقوم بحساب النسبة $\frac{n}{N}$

$$\frac{n}{N} = \frac{400}{800} = 0{,}5 > 0{,}05 \rightarrow \text{نستخدم معامل تصحيح}$$

$$\delta_{P'} = \sqrt{\frac{\mathrm{pq}}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\delta_{P'} = \sqrt{\frac{0{,}34.0{,}66}{400}} \sqrt{\frac{800-400}{800-1}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{P'} = 0{,}016}$$

- **حساب احتمال نسبة الأشخاص الذين لا يشعرون بالراحة أكبر من 38%**

$$P(P' \geq 38) = ?$$

ما دام المجتمع موزعا طبيعيا فإنه يمكن تحويل النسبة $P'$ إلى قيمة معيارية $Z$ :

$$P' \rightarrow Z = \frac{P' - \text{U}_{P'}}{\delta_{P'}}$$

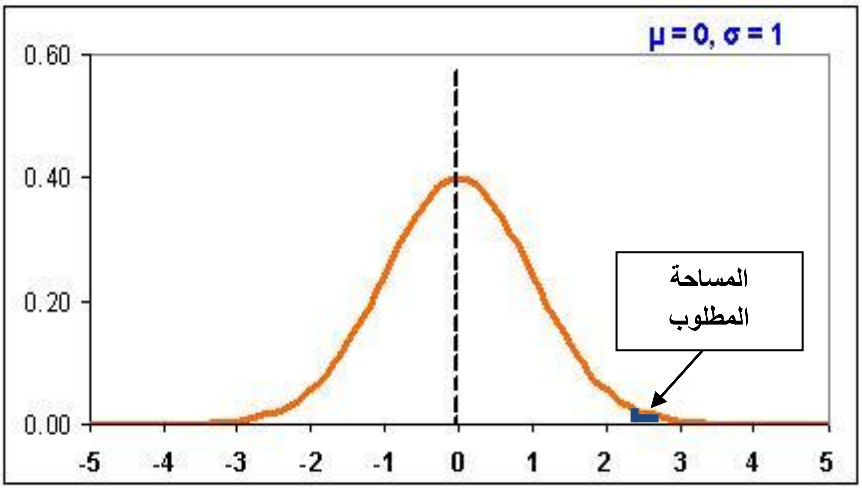
$$P(P' \geq 0{,}38) = P(Z \geq \frac{0{,}38 - 0{,}34}{0{,}016})$$

$$P(Z \geq 2{,}5) = ?$$

**من جدول التوزيع الطبيعي نجد:**

$$P(Z = 2{,}5) = 0{,}4938$$

$$P(Z \geq 2{,}5) = ?$$




ومنه:

$$\text{P}(\text{P}' \geq 2{,}5) = 0{,}5 - \text{P}(\text{Z} = 2{,}5)$$

$$\text{P}(\text{P}' \geq 2{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4938 = 0{,}0062$$

- **حساب احتمال أن تكون نسبة الأشخاص الذين يشعرون بالراحة أقل من 68%**

$$N = 800 \;, \qquad P = 0{,}66$$

$$n = 400 \ , \quad q = 0{,}34$$

**حسب نظرية المعاينة للنسب :**

$$\cup_{P'} = \cup_P = P = 0{,}66$$

$$\delta_{P\prime} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\delta_{P'} = \sqrt{\frac{0{,}34.0{,}66}{400}} \sqrt{\frac{800-400}{800-1}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{P'} = 0,016}$$

$$P(P' \geq 0{,}68) = ?$$

**ما دام المجتمع موزعا طبيعيا فإنه يمكن تحويل النسبة $P'$ إلى قيمة معيارية $Z$ :**

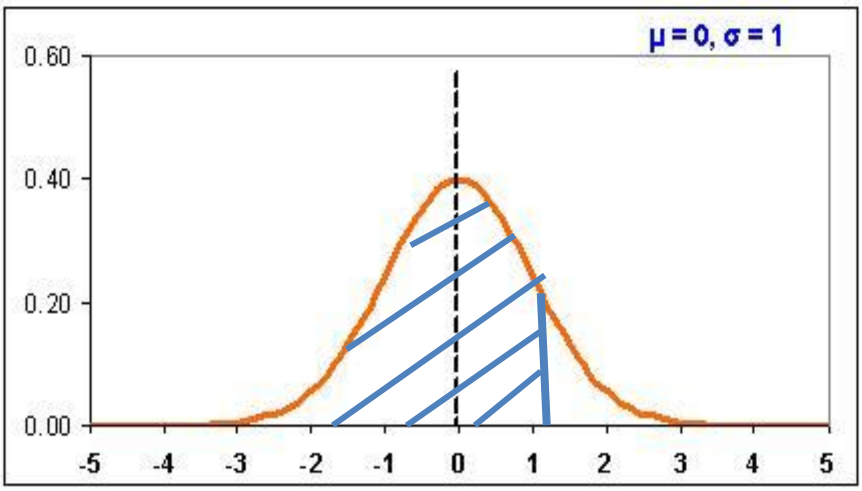
$$P' \to Z = \frac{P' - \cup_{P'}}{\delta_{P'}}$$

$$P(P' \leq 0{,}68) = P(Z \leq \frac{0{,}68 - 0{,}66}{0{,}016}$$

$$P(Z \leq 1{,}25) = ?$$

**من جدول التوزيع الطبيعي نجد:**

$$P(Z = 1{,}25) = 0{,}3944$$



**ومنه:**

$$P(Z \leq 1{,}25) = 0{,}5 + P(Z = 1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944$$

$$P(P' \leq 0{,}68) = 0{,}8944$$

**مثال 2:** في 120 رمية لعملة نقدية موزونة

- أوجد احتمال أن تظهر الصورة ما بين [40% -60%] ؟
- أوجد احتمال أن يكون أكثر من $5/_8$ ظهور صورة ؟

P: متغير عشوائي يمثل نسبة ظهور صورة

$$P = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$q = 1 - P = 0{,}5$$

- **حساب احتمال ظهور صورة بين [40%-60%]:**

مادمنا في حالة نسب المجتمع دائما موزع طبيعيا:

$$P \rightarrow Z = \frac{P' - U_{P'}}{\delta_{P'}}$$

$$P(0{,}5 \leq P \leq 0{,}6) = ?$$

**حسب نظرية المعاينة للنسب :**

$$U_{P'} = U_P = P = 0{,}5$$

ما دام حجم المجتمع مجهول( N= ?) نفترض أن النسب $\frac{n}{N} < 0{,}05$ ولا نستخدم معامل التصحيح

$$\delta_{P'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}5 * 0{,}5}{120}} = 0{,}045$$

$$P(0{,}4 \leq P' \leq 0{,}6) =$$

$$P\left(\frac{0{,}4 - 0{,}5}{0{,}045} \leq Z \leq \frac{0{,}6 - 0{,}5}{0{,}04}\right)$$

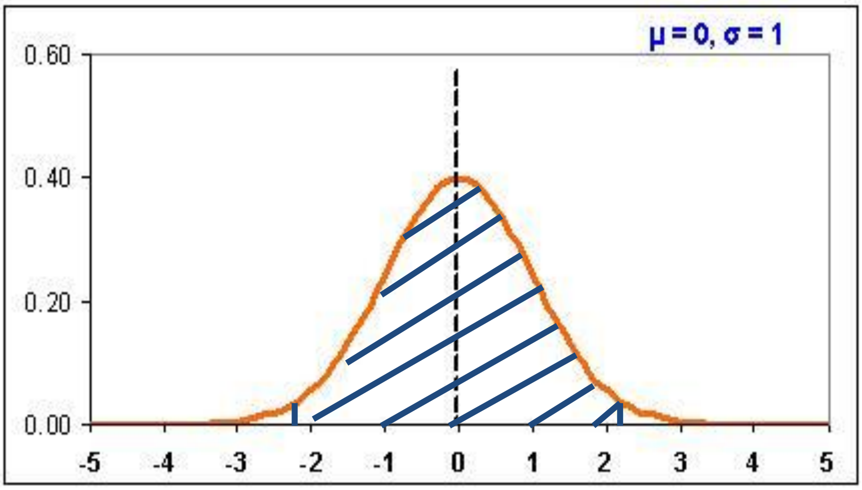
$$P(-2{,}22 \leq Z \leq 2{,}22)$$

**من جداول التوزيع الطبيعي نجد :**

$$P(Z=-2{,}22)=P(Z=2{,}22)=0{,}4868$$

$$P(-2{,}22\leq Z\leq 2{,}22)=P(Z=-2{,}22)+P(Z=2{,}22)=$$

$$P(-2{,}22\leq Z\leq 2{,}22)=\int_{-2{,}22}^{0} f(x)_{dx}+\int_{0}^{2{,}22} f(x)_{dx}$$




ومنه:

$$P(-2{,}22\leq Z\leq 2{,}22)=(0{,}4868).2=0{,}9736$$

- حساب احتمال أن تظهر الصورة أكثر من $5/8$ :

$$P\left(P'\geq\frac{5}{8}\right)=P(P'\geq 0{,}62)=?$$

$$P\left(Z\geq\frac{0{,}62-0{,}5}{0{,}045}\right)=P\ (Z\geq 2{,}66)$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد:

$$P(Z=2{,}66)=0{,}4961$$

$$P(Z\geq 2{,}66)=0{,}5-P(Z=2{,}66)$$

$$P(Z\geq 2{,}66)=0{,}5-0{,}4961=0{,}0039\ \ )$$

## 2-3- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين مسحوبين من مجتمعين:

في كثير من التطبيقات العملية تكون الأبحاث متعلقة بدراسة مجتمعين، وعلى وجه التحديد تكون الأبحاث متركزة على معرفة فيما إذا كان هناك فرق ما بين متوسطي مجتمعين، أو معرفة مقدار الفرق بينهما، فمثلا إذا كان أحد المصانع يستورد المواد الخام من مصدرين مختلفين قد ترغب إدارة هذا المصنع في معرفة أي المصدرين في المتوسط يعطي مواد خام أكثر جودة، أو من الممكن أنه يوجد في أحد المصانع خطى إنتاج وترغب الإدارة في معرفة أي الخطين في المتوسط يعطي أكثر إنتاجا، أو مثلا من الممكن وجود برنامجين مختلفين للتدريب على وظيفة معينة وترغب الجهة ذات الاختصاص معرفة أي البرنامجين في المتوسط يؤهل عاملين أكثر كفاءة، فإذا تمكن الباحثين من التوصل إلى معرفة وجود فرق ما بين المتوسطين فإنه من المرغوب فيما بعد معرفة مقدار هذا الفرق، وللإجابة على ذلك جرت العادة على اختيار عينة من كل مجتمع من المجتمعين ثم مقارنة الفرق ما بين متوسطي هاتين العينتين.[3]

**نظرية توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين:**

نفرض أنه لدينا مجتمعين مختلفين $(N_1)$ و $(N_2)$ يخضعان لتوزيع معين، وقمنا بسحب عينة من كل مجتمع $(n_1)$ و $(n_2)$. وإذا كانت:

$X_{i1}$ : متغير عشوائي يمثل عناصر المجتمع الأول $(X_{11}\ X_{21}\ X_{31}\ \dots\dots\dots\ X_{n1})$

$X_{i2}$: متغير عشوائي يمثل عناصر المجتمع الثاني $(X_{12}\ X_{22}\ X_{32}\ \dots\dots\dots\ X_{m2})$

متوسط المجتمع الأول هو $(U_{x1})$ وتباينه $(\delta_{x1})$ ومتوسط المجتمع الثاني هو $(U_{x2})$ وتباينه $(\delta_{x2})$، وكانت العينتين المسحوبتين من هذين المجتمعين مستقلتين، و $(\overline{X}_1)$ ترمز للمتغير العشوائي الممثل للعينة الأولى و $(\overline{X}_2)$ ترمز للمتغير العشوائي الممثل للعينة الثانية، وكان حجم العينتين كبيرا فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطي العينتين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط: $U_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$ وانحراف معياري: $\delta_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$.

---
[3]- علي عبد السلام العماري، عي حسين العجيلي،مرجع سبق ذكره، ص 424.

**إذا وفقا لهذه النظرية فإن:**

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \sim (\cup_{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} , \delta_{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)})$$

**ومنه حسب نظرية المعاينة للفروق بين المتوسطات فإن:**

- الفرق بين متوسطي عينتين:

$$\cup_{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} = \cup_{\overline{X}_1} - \cup_{\overline{X}_2}$$

- أما الانحراف المعياري للفروق بين المتوسطات:

$$\delta_{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} = \sqrt{\frac{\delta^2_{X_1}}{n} + \frac{\delta^2_{X_2}}{n}}$$

**مثال:**

إذا كان متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح كهربائية من إنتاج المصنع A هو 1400 بانحراف معياري 200 بينما تلك التي ينتجها المصنع B قدر العمر الإنتاجي 1200 بانحراف معياري 100،إذا سحبت عينة عشوائية 125 مصباح من كل مصنع ، ما هو احتمال أن يكون متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع A على الأقل 160 سا أطول من العمر الإنتاجي B ؟

– ثم ما هو احتمال أن يكون متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح مصنع A على الأكثر 250 سا أطول من العمر الإنتاجي B؟

**الحل:** معطيات المثال هي:

| **المجتمع B** | **المجتمع A** |
|---|---|
| $\cup_{X_B} = 1400$ | $\cup_{X_A} = 1400$ |
| $S_{X_b} = 100$ | $S_{X_A} = 200$ |
| $n_b = 125$ | $n_A = 125$ |
| $N_b = ?$ | $N_A = ?$ |

**1– إيجاد احتمال أن يكون العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع A أطول من المصنع B على الأقل ب 160ساعة:** $P(\overline{X}_A - \overline{X}_B) \geq 160) = ?$

**حسب نظرية النهاية المركزية**

ما دام $n_A > 30$ و $n_B > 30$ فإن متغير الفرق $(\overline{X}_A - \overline{X}_B)$ يتبع توزيع طبيعي ويمكن تحويله إلى قيمة معيارية $Z$ مقدارها:

$$(\overline{X}_A - \overline{X}_B) \rightarrow Z = \frac{(\overline{X}_A - \overline{X}_B) - \mathrm{U}_{\overline{X}_A - \overline{X}_B}}{\delta_{\overline{X}_A - \overline{X}_B}}$$

ومنه:

$$P(\overline{X}_A - \overline{X}_B) \geq 160) = ?$$

$$P\left(Z \geq \frac{160 - \mathrm{U}_{X_A - X_B}}{\delta_{\overline{X}_A - \overline{X}_B}}\right) = ?$$

**حسب نظرية المعاينة للفرق بين المتوسطات**

- **متوسط الفرق بين العينتين:**

$$\mathrm{U}_{\overline{X}_A - \overline{X}_B} = \mathrm{U}_{\overline{X}_A} - \mathrm{U}_{\overline{X}_B} = \mathrm{U}_{X_A} - \mathrm{U}_{X_B}$$

$$\mathrm{U}_{\overline{X}_A - \overline{X}_B} = 1400 - 1200 = 200$$

- **الانحراف المعياري للفرق بين متوسطي العينتين:**

ما دام $N_A = ?$ و $N_B = ?$ فإننا نفرض $\frac{n_A}{N_A}$ و $\frac{n_B}{N_B}$ أقل من 0,05 ولا نستخدم معامل تصحيح

$$\delta_{(X_A - X_B)} = \sqrt{\frac{\delta^2_{XA}}{n_A} + \frac{\delta^2_{XB}}{n_B}}$$

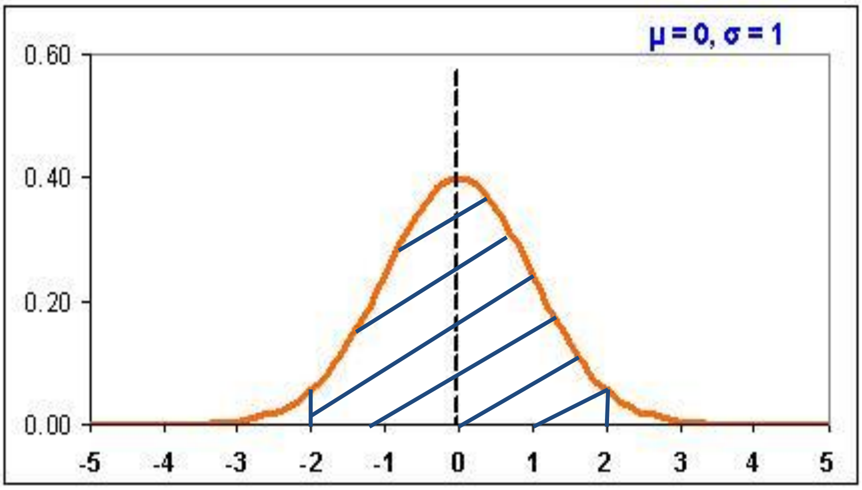
$$\delta_{(X_A - X_B)} = \sqrt{\frac{(200)^2}{125} + \frac{(100)^2}{125}} = 20$$

وبتعويض قيمتي $\mathrm{U}_{\overline{X}_A - \overline{X}_B}$ و $\delta_{(X_A - X_B)}$ في الاحتمال نجد:

$$P\left(Z \geq \frac{160 - 200}{20}\right) = P(Z \geq -2)$$

**من جداول التوزيع الطبيعي نجد:**

$$\boldsymbol{P(Z=-2)=0.4772}$$




$$P(Z\geq -2)=\ 0.5+\ \ 0.4772$$

$$P(Z\geq -2)=\ 0.9772$$

**2− إيجاد احتمال أن يكون العمر الإنتاجي لمصابيح المصنع A على الأقل 250 سا أفضل من B:**

$$P\left(\overline{X}_A-\overline{X}_B\leq 150\right)=?$$

**حسب نظرية النهاية المركزية:** ما دام $n_A>30$ و $n_B>30$ فإن متغير الفرق $\left(\overline{X}_A-\overline{X}_B\right)$ يتبع توزيع طبيعي ويمكن تحويله إلى قيمة معيارية $Z$ مقدارها:

$$\text{P}((\overline{X}_A-\overline{X}_B)\leq 250)=P(Z\geq \frac{250-\text{U}_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}}{\delta_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}})$$

**حسب نظرية المعاينة للفروق بين المتوسطات**

- **متوسط الفرق بين العينتين:**

$$\text{U}_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}=\text{U}_{\overline{X}_A}-\text{U}_{\overline{X}_B}=\text{U}_{X_A}-\text{U}_{X_B}$$

$$\text{U}_{\overline{X}_A-\overline{X}_B}=1400-1200=200$$

- **الانحراف المعياري للفرق بين متوسطي العينتين:**

ما دام $N_A = ?$ و $N_B = ?$ فإننا نفرض $\frac{n_A}{N_A}$ و $\frac{n_B}{N_B}$ أقل من 0,05 لا نستخدم معامل تصحيح

$$\delta_{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)} = \sqrt{\frac{\delta_{XA}^2}{n_A} + \frac{\delta_{XB}^2}{n_B}}$$

$$\delta_{(\overline{X}_A - \overline{X}_B)} = \sqrt{\frac{(200)^2}{125} + \frac{(100)^2}{125}} = 20$$

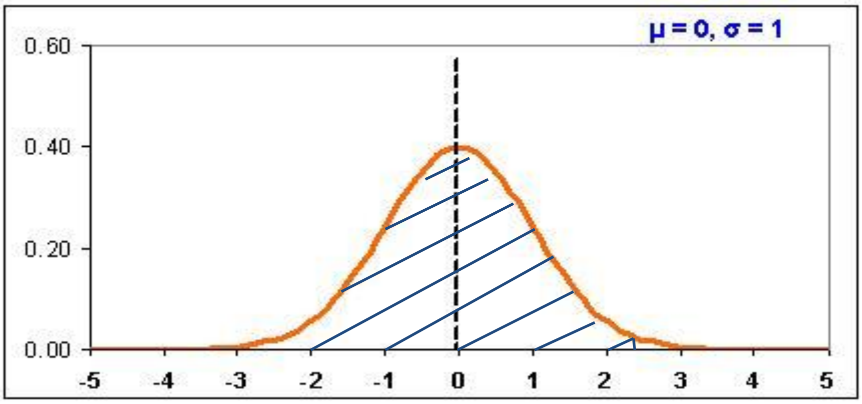
$$P\left(Z \leq \frac{250 - 200}{20}\right) = P(Z \leq 2{,}5)$$

**من جداول التوزيع الطبيعي نجد:**

$$P(Z = 2{,}5) = F(2{,}5) = 0{,}4938$$

$$P(Z \geq 2{,}5) = 0{,}5 + F(2{,}5)$$

$$P(Z \geq 2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938$$




$$P(Z \geq 2{,}5) = 0{,}9938$$