

Chapitre 2 : Magnétostatique

Introduction : Comme le nom du chapitre l'indique, nous allons étudier l'ensemble des phénomènes magnétiques tout d'abord en absence de matière (dans le vide) et en ne considérant que les champs magnétiques ne variant pas dans le temps, c'est-à-dire constant.

2.1. Définition

Le champ d'induction magnétique \vec{B} traduit l'effet du déplacement des charges électriques (un courant I).

2.2. Calcul du champ d'induction magnétique \vec{B} .

Loi de Biot et Savart

En un point P de l'espace, l'élément de conducteur $d\vec{l}$, parcouru par I , génère un champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$.

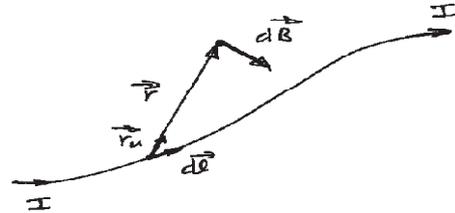
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

où $d\vec{l}$: longueur du circuit soumis au courant I , orienté dans le sens de I .

r : distance de l'élément $d\vec{l}$ au point d'expression de l'induction $d\vec{B}$.

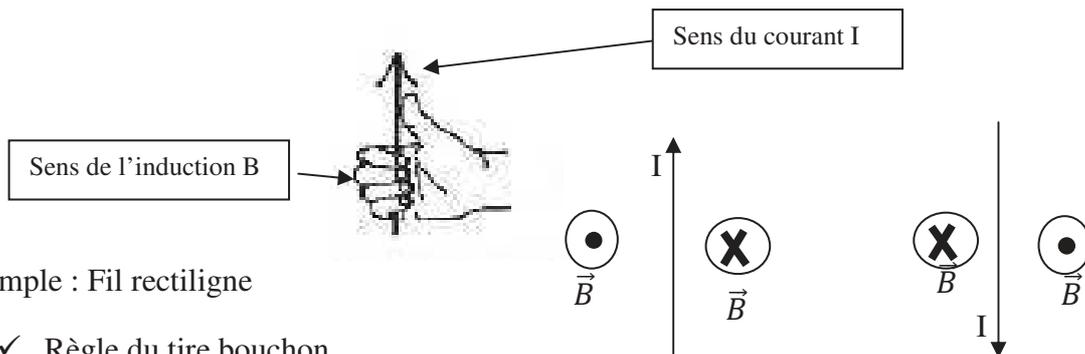
μ_0 : Perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$).

L'induction \vec{B} s'exprime en Tesla (B/T).



Le sens de $d\vec{B}$ est donné par la règle du tire-bouchon (ou la règle de la main droite). La direction de $d\vec{B}$, est donnée par le produit vectoriel $d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$.

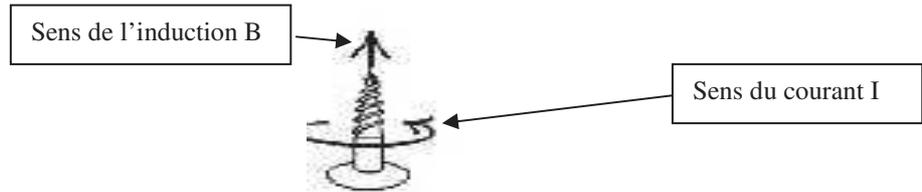
✓ La main droite



Exemple : Fil rectiligne

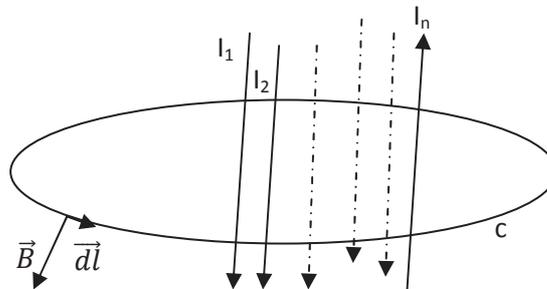
✓ Règle du tire bouchon

Exemple : Spire



Loi (ou théorème) d'Ampère

Considérons n conducteurs I_1, I_2, \dots, I_n dans l'espace et un contour fermé c entourant ces n conducteurs.



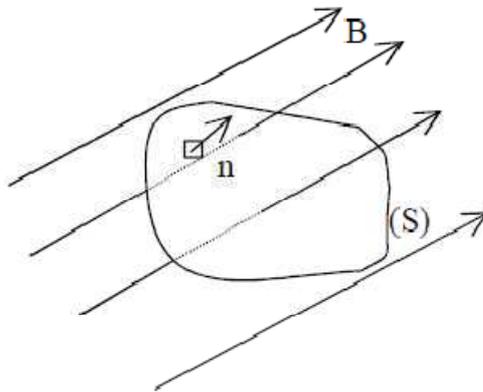
La circulation du vecteur d'induction \vec{B} le long d'une courbe fermée c est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s 'appuyant sur le contour c .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.2)$$

Remarque : La loi d'Ampère est simple à utiliser et permet de calculer le champ B lorsque la forme des lignes de champ d'induction peut être déterminée par symétrie. Le contour fermé l doit avoir une position simple (tangent ou perpendiculaire) par rapport aux lignes de champ. Souvent, le contour l représente lui-même une ligne de champ d'induction [4].

2.3. Conservation du flux magnétique

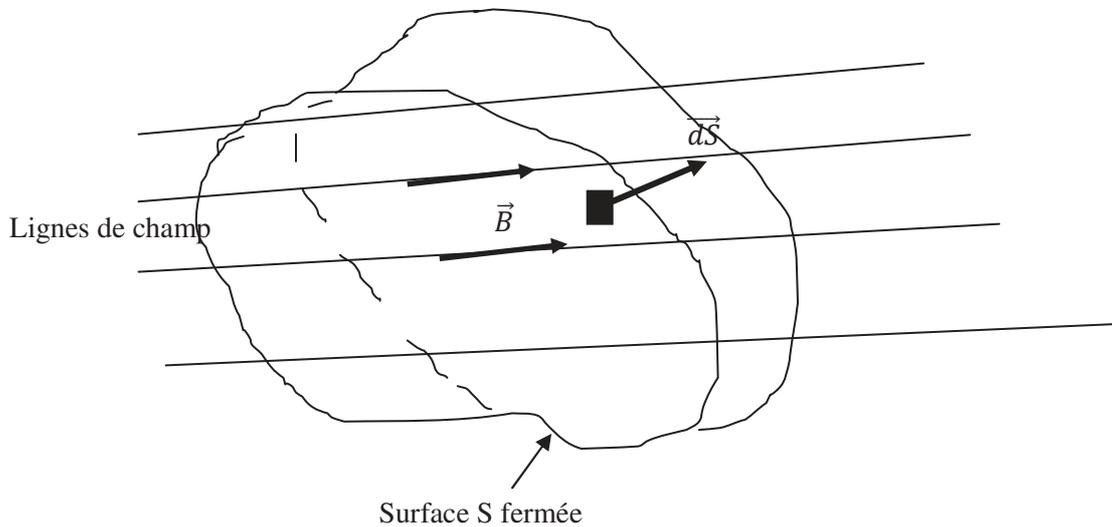
Le flux du vecteur d'induction magnétique \vec{B} à travers une surface fermée (S) est définie par :



$$\varphi(\vec{B}) = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

2.3.1. Loi de Gauss magnétique

Considérons une surface S fermée (c'est-à-dire contenant un volume) plongée dans un champ d'induction magnétique \vec{B} .



La loi de Gauss du magnétisme s'exprime par :

$$\varphi(\vec{B}) = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.4)$$

Le flux magnétique net traversant une surface fermée est nul

Question : Montrer que $\text{div } \vec{B} = 0$?

D'après la loi de Biot est savart

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \text{div}(\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3})$$

$$\text{div} \left(\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{dl} - \vec{dl} \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

On a :

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}$$

Donc :

$$\text{div} \left(\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{dl} - \vec{dl} \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{dl} \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \right) = 0. (\text{car le rotationnel d'un gradient est toujours égale à zero})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{dl} = 0. (\text{car } \vec{dl} \text{ est un vecteur fixe donc son rotationnel est nul}).$$

On obtient :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ (Equation de Maxwell Gauss magnétique)}$$

Le flus de \vec{B} est un flux conservatif.

2.4. Potentiel vecteur magnétique

On a :

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = 0 \text{ (divergence d'un rotationnel est toujours égale à zero)}$$

$$\text{div}(\vec{B} - \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$$

\vec{A} est appelé potentiel vecteur magnétique

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \tag{2.5}$$

L'induction magnétique B derive d'un potentiel vecteur magnétique

Remarque :

$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$, si on pose $\vec{A} = \vec{C} + \overrightarrow{grad}f \Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{rot}\vec{C} \Rightarrow \vec{A}$ n'est pas unique

En stationnaire on ajoute le jauge de Coulomb $div\vec{A} = 0$ pour assurer l'unicité de \vec{A} .

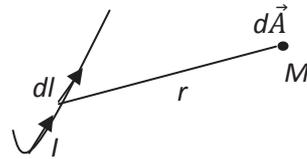
En régime stationnaire on a :

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \\ div\vec{A} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.4.1. Loi de Biot est Savart et potentiel vecteur magnétique

Montrer que : $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$?

Comme $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$, il vient que ;



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow d(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{rot}(d\vec{A})$$

On a $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$ soit $\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge d\vec{l}$ alors

$$\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\overrightarrow{rot} \frac{d\vec{l}}{r} - \frac{1}{r} \overrightarrow{rot} d\vec{l} \right)$$

Comme $d\vec{l}$ est un vecteur fixe $\Rightarrow \overrightarrow{rot} d\vec{l} = 0$

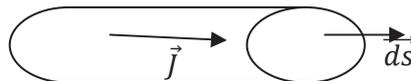
Donc

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r} \quad (2.7)$$

2.5. Expression local du théorème d'Ampère

On définit la densité de courant J par :

$$J = \frac{I}{S} [\text{A/m}^2] \quad (2.8)$$



Ou bien plus généralement :

$$I = \oint \vec{J} ds \quad (2.10)$$

Le champ d'induction magnétique d'un conducteur cylindrique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dv.$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I,$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \overrightarrow{rot} \vec{B} ds = \mu_0 \iint \vec{J} ds.$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) est dite équation de Maxwell Ampère en stationnaire.

2.6. Equation de Poisson magnétique

On a :

$$\begin{aligned} div \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \overrightarrow{rot} \vec{A}. \\ div \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}, \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.12)$$

2.7. Force de Lorentz

Force exercée sur une charge test ponctuelle q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ d'induction magnétique \vec{B} :

$$\overrightarrow{F}_{mag} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.13)$$

En présence d'un champ électrique et d'un champ d'induction magnétique (Force de Lorentz)

$$\vec{F} = \overrightarrow{F}_{mag} + \overrightarrow{F}_{el} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.14)$$

Force magnétique s'exerçant sur un élément de conducteur parcouru par un courant I : si λ est la densité en (C/m) des charges se déplaçant à la vitesse \vec{v} , on a $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta l}{\Delta t} = \frac{\lambda v \Delta t}{\Delta t} = \lambda v$. Par conséquent [3],

$$\overrightarrow{F}_{mag} = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) dq = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \lambda dl \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{F}_{mag} = \int I(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \quad (2.15)$$

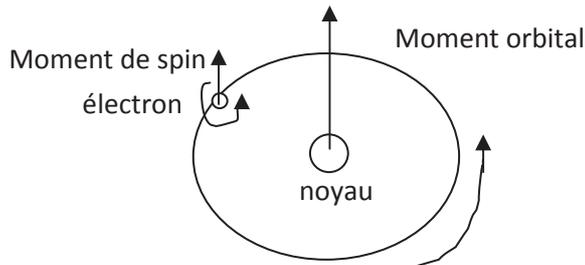
2.8 Matériaux magnétiques

2.8.1 Définition matériau magnétique

Les matériaux magnétiques sont des matériaux qui ont la propriété de présenter un moment **d'aimantation** sous l'influence d'un champ magnétique d'excitation extérieur.

 Aimantation et Moment magnétique

Pour expliquer le concept de l'aimantation, il est nécessaire de passer à l'échelle atomique et de définir le moment magnétique atomique. Considérant un matériau comme un ensemble d'atome [6].



Chaque atome possède un moment atomique, contribution d'un moment orbital et d'un moment de spin.

- ✓ Le moment orbital d'un atome résulte de la rotation de ses électrons autour du noyau.
- ✓ Le moment de spin d'un atome résulte de la rotation de ses électrons sur eux-mêmes.

Le moment magnétique atomique total d'un matériau est la somme vectorielle de tous ses moments magnétiques atomiques. Le moment magnétique m d'un matériau constitué de n atomes s'exprime alors ainsi :

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (2.16)$$

- ✓ Aimantation

L'aimantation magnétique est la quantité de moment magnétique atomique par unité de volume

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} \text{ [A/m]} \quad (2.17)$$

où \vec{M} est l'aimantation magnétique et V est le volume.

2.8.2. Relation entre Le champ d'induction magnétique \vec{B} et le champ magnétique \vec{H}

2.8.2.1. Définition champ d'excitation magnétique \vec{H}

Le champ magnétique \vec{H} (A/m) rend compte de l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Son rotationnel ne dépend que des sources externes de courant [3].

La loi d'Ampère donne :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{tot}$$

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{app} + \vec{J}_{mag}$$

où \vec{J}_{app} est dû à une éventuelle source externe de courant et \vec{J}_{mag} est associé à l'aimantation du matériau (courants microscopiques).

$$rot \vec{H} = \vec{J}_{app}$$

Dès lors, on peut écrire

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (2.18)$$

La relation entre l'aimantation magnétique \vec{M} et les courants \vec{J}_{mag} donnée par :

$$rot \vec{M} = \vec{J}_{mag} \quad (2.19)$$

Dans un milieu magnétique linéaire homogène et isotrope

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.20)$$

où χ_m est la susceptibilité magnétique

Dès lors

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &\Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned}$$

où $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ est la perméabilité magnétique du milieu. On écrit aussi

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

où $\mu_r = (1 + \chi_m)$ est la perméabilité relative du milieu.

On classifera les matériaux magnétiques suivant la valeur de leur susceptibilité magnétique χ_m .

2.8.3 Classification des milieux magnétiques

$\chi_m < 0$: Milieux diamagnétiques

La susceptibilité χ_m est faible et de valeur négative. \vec{H} et \vec{M} sont donc de sens contraire (cuivre, plomb, silicium).

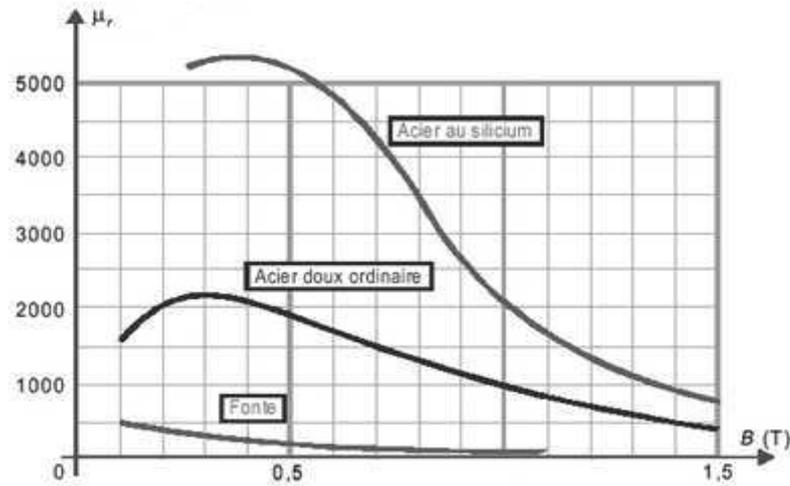
$\chi_m > 0$ Milieux paramagnétiques

La susceptibilité χ_m est faible et de valeur positive. \vec{H} et \vec{M} sont de sens identique (par exemple : aluminium, tungstène, platine).

$\chi_m \gg 1$ Milieux ferromagnétiques

La susceptibilité χ_m est grande. Ces matériaux sont essentiels pour l'électrotechnique.

Ils se basent sur l'utilisation du Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages. La courbe ci-dessous donne un ordre de grandeur et l'évolution de la perméabilité relative pour trois matériaux ferromagnétiques en fonction du champ magnétique B qui les traversent.

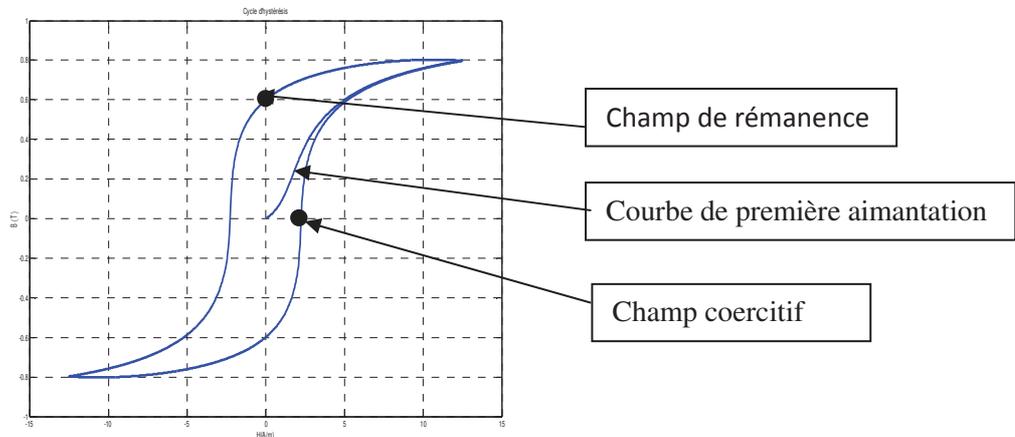


Source : Introduction aux circuits magnétiques [7]

2.8.4 Cycle d'hystérésis

2.8.4.1. Définition

On appelle cycle d'hystérésis (la courbe $B(H)$) d'un matériau le relevé de l'induction \vec{B} qu'il génère alors soumis à un champ magnétique \vec{H} que l'on fait varier [6].



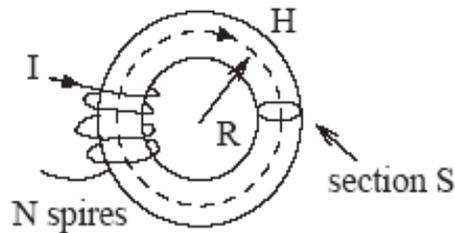
Conséquence :

Il subsiste une induction rémanente B_r lorsque l'on annule l'excitation. Si l'on souhaite annuler B , il faut inverser le champ d'excitation H , on appelle la valeur de ce champ le champ coercitif H_c . [7].

Remarque : l'hystérésis magnétique = retard dû à la dynamique des domaines magnétiques

2.8.4.2. Energie dissipée par cycle

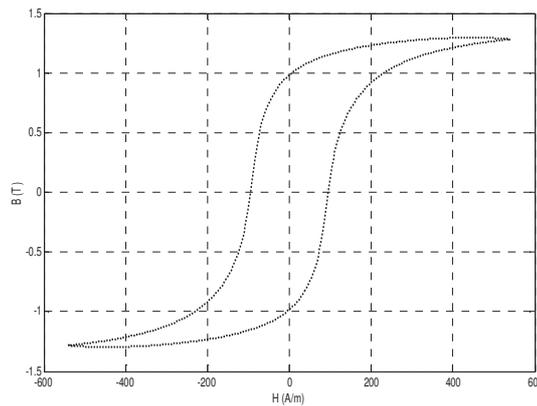
✓ Energie électrique fournie par cycle



D'après le théorème d'Ampère, $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{J}_{app} \Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$

Et par la loi de Faraday, $= \frac{d\phi}{dt}$, on obtient l'énergie électrique fournie par cycle

$$E_{\acute{e}le} = \oint NVI dt = \oint N \frac{dB \cdot S H(2\pi R)}{dt} dt = 2\pi RS \oint H dB$$



✓ Energie dissipée par le matériau par unité de volume et par cycle [3] :

$$E_{dissipée} = \frac{E_{\acute{e}le}}{V} = \oint H dB \quad (2.21)$$

2.8.5. Classification des matériaux ferromagnétiques

L'observation du cycle d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories :

1-Matériaux ferromagnétiques doux :

B_r plutôt élevée

H_c plutôt faible

Surface du cycle d'hystérésis faible

2-Matériaux ferromagnétiques durs :

B_r plutôt faible

H_c plutôt élevée

Surface du cycle d'hystérésis élevée