Exercice n°1:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.
On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice n°2:

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_f)$?
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.
4. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
5. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n°3:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$, et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
   Dans la suite de l'exercice, la fonction f sera étudiée sur $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$.
3. Déterminer les limites en 1 et la limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_f)$?
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n°4:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$, et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine, en déduire l'existence d'une asymptote horizontale (Δ) pour $(\mathcal{C}_f)$.
3. Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$et de (Δ).
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n°5:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 27}{2x^2}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier l'équivalence : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de f.
   (c) Étudier le signe de f'.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice n°6:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est $2\pi-$périodique.
   (b) Montrer que f est paire.
2. (a) Montrer que la fonction dérivée de f s'écrit : $f'(x) = 2\sin x(1 - 2\cos x)$.
   (b) Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur un intervalle de longueur 4π.

Exercice n°7:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \sin x}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie ssi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est $2\pi-$périodique.

   Pour la suite de l'exercice, on étudiera la fonction sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. Déterminer les limites de f en :
   (a) $-\dfrac{3\pi}{2}$ par valeurs supérieures,
   (b) $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures,
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right[$.

Exercice n°8:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x^2 - |x|$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est paire.
2. Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
5. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°9:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x - \sqrt{|x-1|}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $[1; \infty[$ et sur $]-\infty; 1]$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.
3. Étudier la fonction sur $]-\infty; 1]$.
4. Étudier la fonction sur $[1; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Définition : soit x un nombre réel, on appelle partie entière de x et on note $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemples :
$E(5,4) = 5 \quad E(\sqrt{2}) = 1 \quad E(4) = 4 \quad E(-2,5) = -3.$

Exercice n°10:

Tracer la courbe représentative de la fonction partie entière : $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-3, 3[$.

Exercice n°11:

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = x - E(x)$.

1. Montrer que E est périodique de période 1.
2. Donner l'expression de f sur $[0, 1[$ puis sur $[1, 2[$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3, 3[$.