

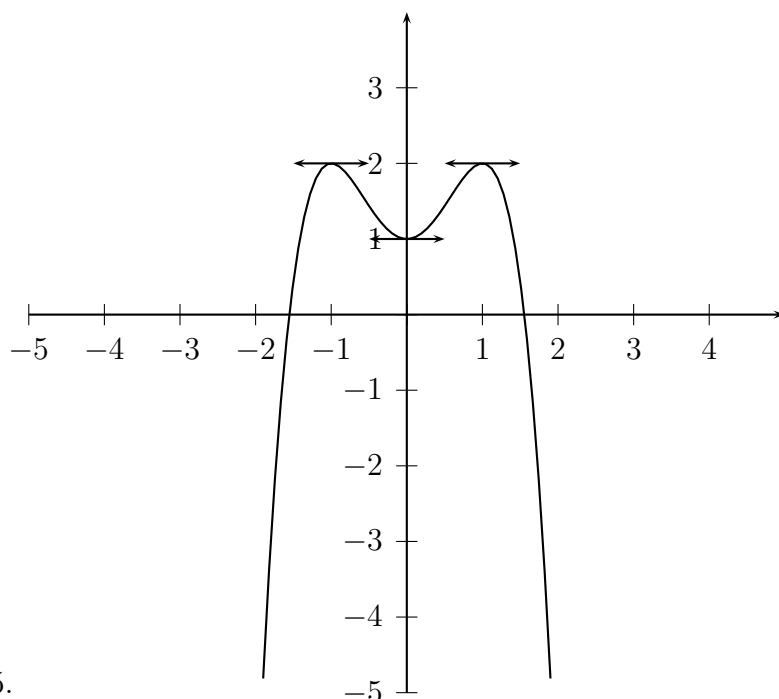
**Exercice n°1:**

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x \in \mathbb{R}$ . (On peut aussi dire que le domaine de définition est centré en 0.)  
soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$ , donc  $f$  est paire
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 = -\infty$  et par symétrie :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2)$ .  
D'une part  $4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ , d'autre part  $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$  (règle du signe du trinôme), ce qui donne :

|           |   |   |           |
|-----------|---|---|-----------|
| $x$       | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $4x$      | 0 | + | +         |
| $1 - x^2$ | + | 0 | -         |
| $f'(x)$   | 0 | + | -         |

4.

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 0 | + | 0         |
| $f(x)$  | 1 | 2 | $-\infty$ |



5.

Dans un graphique doivent apparaître toutes les droites dont il a été question dans le sujet, auquel s'ajoutent les tangentes horizontales.

**Exercice n°2:**

1. Le domaine de définition est centré en 1, de plus pour tout  $h \neq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(1+h) + f(1-h)] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+h)^2 + (1+h) + 1}{1+h-1} + \frac{(1-h)^2 + (1-h) + 1}{1-h-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3+3h+h^2}{h} + \frac{3-3h+h^2}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3+3h+h^2-3+2h-h^2}{h} \right] = \frac{1}{2} \times \frac{6h}{h} = 3 \end{aligned}$$

Donc le point  $\Omega$  de coordonnées  $(1; 3)$  est centre de symétrie de  $(\mathcal{C}_f)$ .

2. •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et par symétrie,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .  
 •  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ , et par symétrie :  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .

3. Pour tout  $x \neq 1$ ,  $ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1) + c}{x-1} = \frac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1}$ ,  
 en identifiant le numérateur de cette fraction avec celui de  $f(x)$ , on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ donc } f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$  et la droite  $(d)$  d'équation  $y = x+2$  est asymptote à la courbe en  $+\infty$ .

Puisque  $\Omega \in (d)$ , nous pouvons déduire que  $(d)$  est aussi asymptote à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $-\infty$ .

5. Pour  $x \neq 1$ ,  $f$  est dérivable comme quotient de deux polynômes, et :

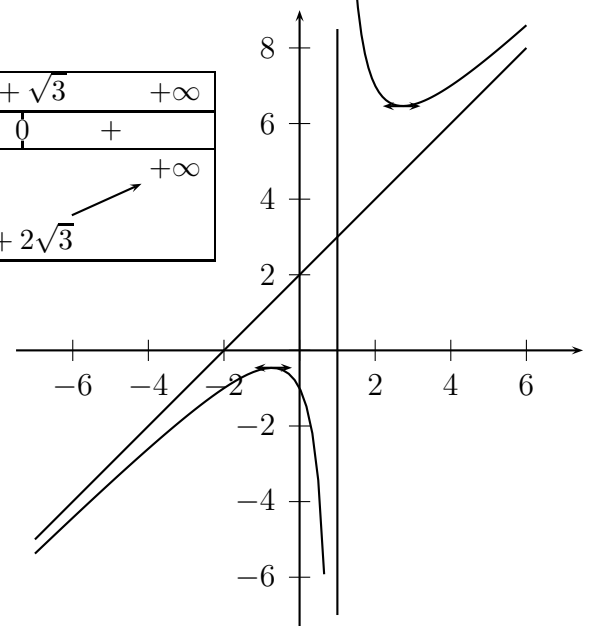
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}.$$

Pour tout  $x \neq 1$ ,  $(x-1)^2 > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $x^2 - 2x - 2$ , polynôme ayant pour racines  $1 - \sqrt{3}$  et  $1 + \sqrt{3}$  qui, d'après la règle du signe du trinôme est positif ssi  $x \in ]-\infty; 1 - \sqrt{3}[ \cup ]1 + \sqrt{3}; +\infty[$ .

- 6.

|         |           |                 |     |                |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----|----------------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1 - \sqrt{3}$  | $1$ | $1 + \sqrt{3}$ | $+\infty$       |           |
| $f'(x)$ |           | +               | 0   | -              | 0               | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $3 - 2\sqrt{3}$ |     | $+\infty$      | $3 + 2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

Remarque : il était possible de ne faire que la moitié du tableau de variations.



**Exercice n°3:**

1.  $f$  est définie ssi  $x^2 + 2x - 3 \neq 0$  ssi  $x \neq 1$  et  $x \neq -3$ , donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-3; 1\}$ .

2.  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à 1, et pour tout  $h \neq \pm 2$ , on a :

$$f(-1+h) = \frac{3}{(-1+h)^2 + 2(-1+h) - 3} = \frac{3}{h^2 - 4},$$

$$\text{et } f(1+h) = \frac{3}{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3} = \frac{3}{h^2 - 4}.$$

Donc  $f(-1+h) = f(-1-h)$  et la droite d'équation  $x = -1$  est axe de symétrie de  $(\mathcal{C}_f)$ .

3. •  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x - 3 = 0^-$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ , d'autre part :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2x - 3 = 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ .

$(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .

Remarque : Le signe ( $0^+$  ou  $0^-$ ) est facile à déterminer ici, cela serait plus compliqué avec par exemple :  $x^2 - 2x$ .

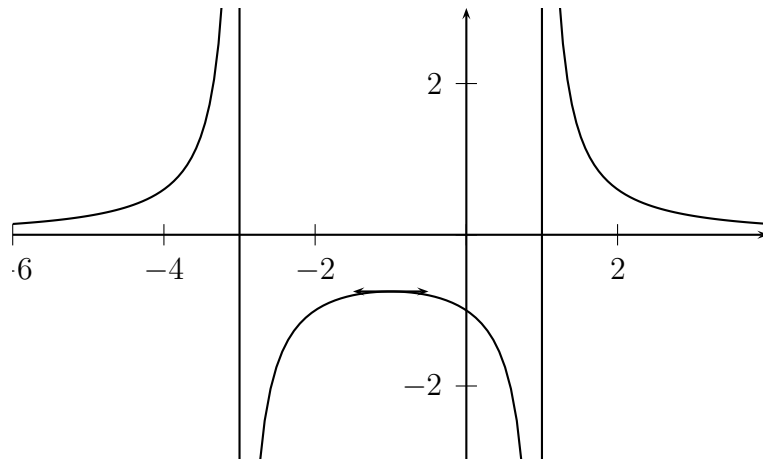
•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 3 = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .

4.  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}_f$ , et pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$  :  $f'(x) = \frac{-3(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$ .

Le dénominateur étant strictement positif,  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -3(2x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ .

5.

|         |                |           |           |
|---------|----------------|-----------|-----------|
| $x$     | -1             | 1         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 0              | -         | -         |
| $f(x)$  | $-\frac{3}{4}$ | $+\infty$ | 0         |



---

**Exercice n°4:**

1. Le polynôme  $x^2 - 2x + 2$  a pour discriminant  $\Delta = -4 < 0$ , donc ce polynôme ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ , de même  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ , donc  $(C_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Pour étudier les positions relatives de  $(C_f)$  et de  $(\Delta)$ , j'étudie le signe de  $f(x) - 1$ .

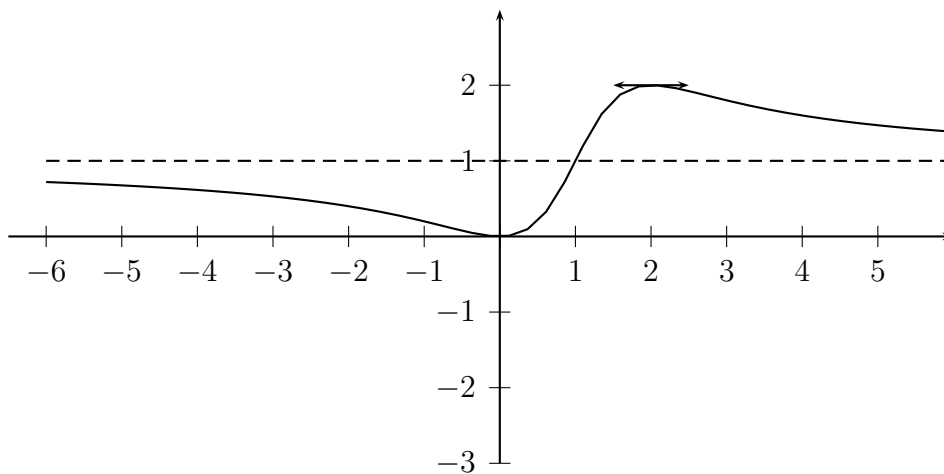
$$f(x) - 1 = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 - 2x + 2 > 0$ , donc  $f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ . Donc  $(C_f)$  est au dessus de son asymptote sur  $[1, +\infty[$  et elle est en dessous sur  $] -\infty; 1]$ .

4.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x + 2) - x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{2x(2 - x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ .  
 $(x^2 - 2x + 2)^2$  étant strictement positif sur  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x(2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$ .

5.

|         |           |     |     |           |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $+$ | $-$       |
| $f(x)$  | $1$       | $0$ | $2$ | $1$       |



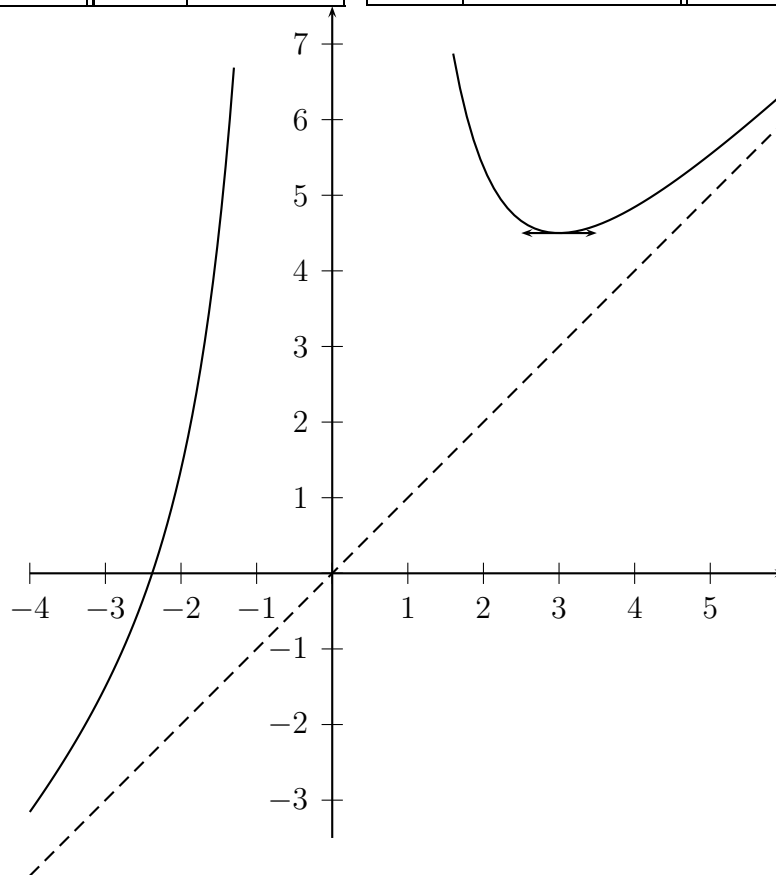
**Exercice n°5:**

- $f$  est définie ssi  $2x^2 \neq 0$  ssi  $x \neq 0$ , donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ .
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \text{ de même } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + 27) = 27 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty. \text{ (à gauche et à droite)}$$
- Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) - x = \frac{2x^3 + 27}{2x^2} - x = \frac{27}{2x^2}$ , or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27}{2x^2} = 0$ , donc la droite d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- La fonction  $x \mapsto x^3$  étant croissante sur  $\mathbb{R}$ , on a :  $x \geq 3 \Leftrightarrow x^3 \geq 3^3 \Leftrightarrow x^3 \geq 27$ .
  - $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $x \neq 0$ ,
 
$$f'(x) = \frac{6x^2 \times 2x^2 - (2x^3 + 27) \times 4x}{4x^4} = \frac{x(x^3 - 27) \times 4x}{x^4}$$
  -

|            |           |     |      |           |
|------------|-----------|-----|------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $0$ | $3$  | $+\infty$ |
| $x$        |           | $-$ | $0$  | $+$       |
| $x^3 - 27$ |           | $-$ | $0$  | $+$       |
| $x^4$      |           | $+$ | $0$  | $+$       |
| $f'(x)$    |           | $+$ | $  $ | $-$       |
|            |           |     | $0$  | $+$       |

|         |           |     |               |           |
|---------|-----------|-----|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $3$           | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ | $  $          | $-$       |
|         |           |     | $0$           | $+$       |
| $f(x)$  |           | $0$ | $+$           | $+\infty$ |
|         |           |     | $  $          | $0$       |
|         |           |     | $\frac{9}{2}$ |           |



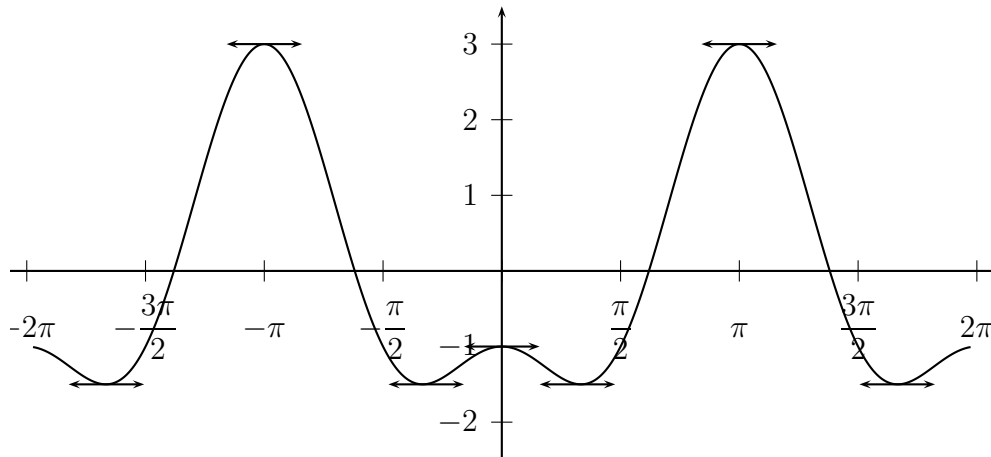
---

**Exercice n°6:**

1. Le domaine de définition est  $\mathbb{R}$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x + 2\pi \in \mathbb{R}$  et  $-x \in \mathbb{R}$ .
- (a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) - 2 \cos(x + 2\pi) = \cos 2x - 2 \cos x = f(x)$ , donc  $f$  est périodique, de période  $2\pi$ .
- (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = \cos(-2x) - 2 \cos(-x) = \cos(2x) - 2 \cos x = f(x)$ , donc  $f$  est paire.
2. (a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :
- $$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x = -4 \sin x \cos x + 2 \sin x = 2 \sin x(-2 \cos x + 1).$$
- (b) Pour tout  $x \in ]0; \pi[$ ,  $\sin x > 0$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - 2 \cos x$ .  
Remarque : on a  $f'(0) = f'(\pi) = 0$ .  
Or, pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $1 - 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ .

|         |    |                 |       |
|---------|----|-----------------|-------|
| $x$     | 0  | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
| $f'(x)$ | 0  | -               | 0     |
| $f(x)$  | -1 |                 | 3     |

$\searrow$   $\swarrow$   
 $-\frac{3}{2}$



3.

---

**Exercice n°7:**

- $f$  est définie ssi  $1 - \sin x \neq 0$  ssi  $\sin x \neq 1$  ssi  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
- pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 - \sin(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 - \sin x} = f(x)$ , donc  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

3. (a)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}^+} \sin x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}^+} 1 - \sin x = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 1 - \sin x = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

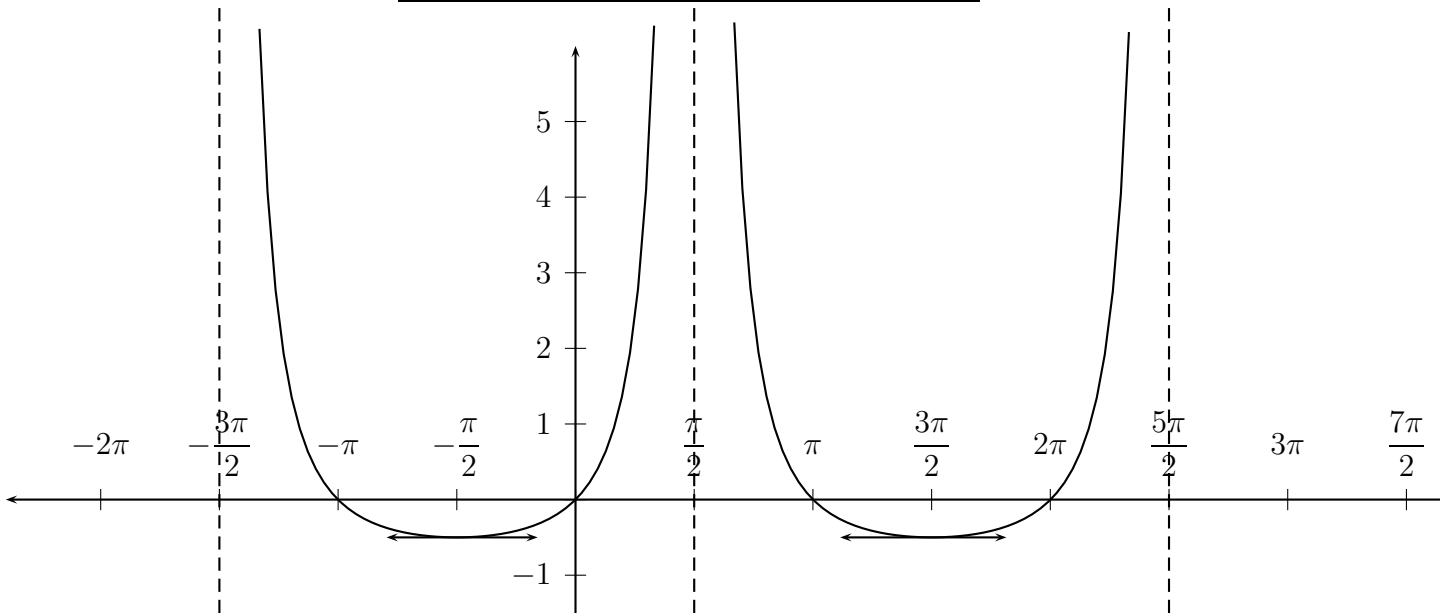
4. Pour tout  $x \in \left] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $f$  est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 - \sin x) - \sin x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$(1 - \sin x)^2 > 0$ , donc  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right[$ .

5.

|         |                   |                  |                 |
|---------|-------------------|------------------|-----------------|
| $x$     | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f'(x)$ |                   | - 0 +            |                 |
| $f(x)$  | $+\infty$         | $-\frac{1}{2}$   | $+\infty$       |



---

**Exercice n°8:**

1. Le domaine de définition est  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$ .

2. Si  $x \geq 0$  :  $f(x) = x^2 - x$  et si  $x \leq 0$  :  $f(x) = x^2 - (-x) = x^2 + x$

$$3. \lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \geq 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \geq 0} x - 1 = -1.$$

$$\lim_{x \leq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \leq 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \leq 0} x + 1 = 1.$$

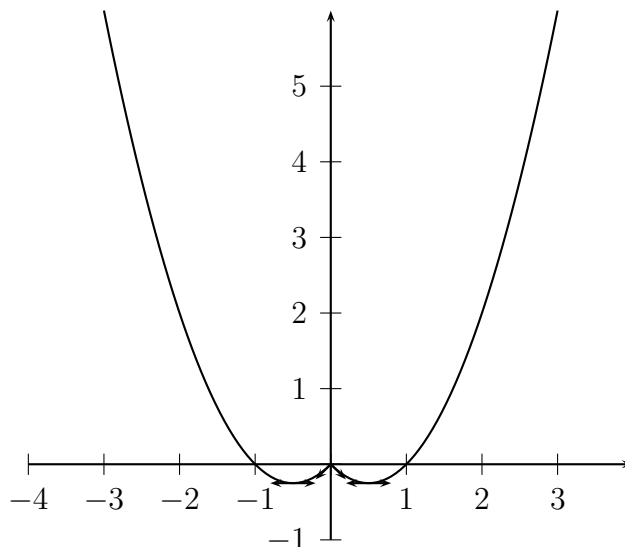
La limite à gauche et la limite à droite étant différente, la limite du taux d'accroissement n'existe pas et  $f$  n'est pas dérivable en 0. (On parle ici de demi-tangentes à droite et à gauche de coefficients directeurs  $-1$  et  $1$ ).

4. Sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = x^2 - x$ , de dérivée  $f'(x) = 2x - 1$ , négative sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  et positive sur  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .

Ce qui donne sur  $[0; +\infty[$  :

|         |   |                |           |
|---------|---|----------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\frac{1}{2}$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0              | +         |
| $f(x)$  | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |

5.



Remarque : La fonction valeur absolue existe sur vos calculatrice sous le nom de Abs. (Menu math sur TI, Optn puis Num sur Casio)

---



**Exercice n°9:**

1. Sur  $[1; \infty[$ ,  $f(x) = x - \sqrt{x-1}$  et sur  $] - \infty; 1]$ ,  $f(x) = x - \sqrt{1-x}$ .

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - \sqrt{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty.$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - \sqrt{1-x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty.$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 1.

En fait, une seule de ces limites était suffisante, mais j'ai mis les deux pour que vous puissiez apprécier le changement de signe à la dernière étape de la deuxième limite.

3. Sur  $] - \infty; 1]$ ,  $f(x) = x - \sqrt{1-x}$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Et  $f'(x) = 1 - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$  qui est positif sur  $] - \infty; 1]$ , donc  $f$  est croissante sur cet intervalle.

4. Sur  $[1; +\infty[$ ,  $f(x) = x - \sqrt{x-1}$ .

$$\text{On a : } f(x) = x - \sqrt{x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} = x \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right). \quad (\sqrt{x^2} = x \text{ car } x > 0)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

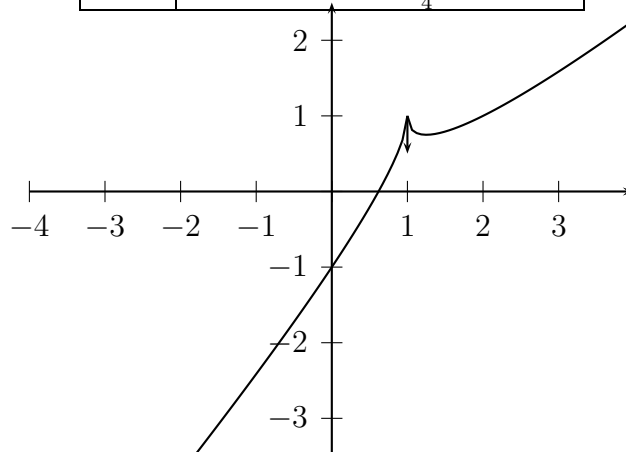
$$\text{Et } f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}}.$$

Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,

$$\sqrt{x-1} > 0 \text{ et } 2\sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}.$$

5.

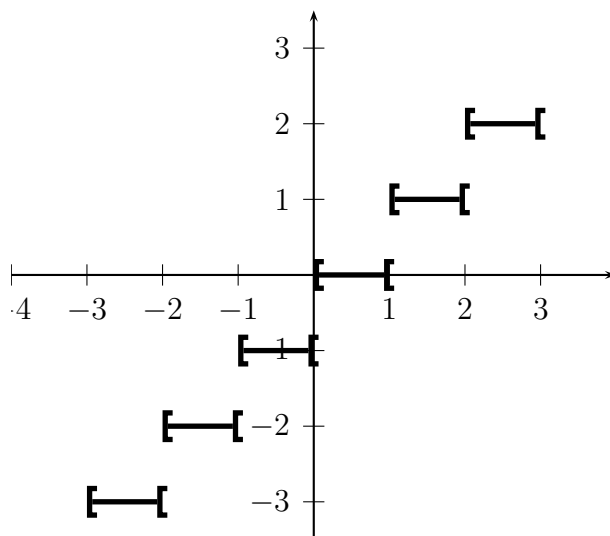
|         |           |     |               |           |
|---------|-----------|-----|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$ | $\frac{5}{4}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$ | $-$           | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$ |



6.

---

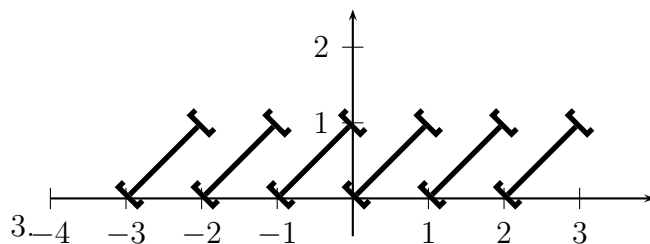
**Exercice n°10:**



Ce type de fonction porte le nom de fonction en escalier.

**Exercice n°11:**

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E(x + 1) = E(x) + 1$ .  
(Attention  $E(x + y)$  n'est pas forcément égal à  $E(x) + E(y)$ ).  
Ce qui donne  $f(x + 1) = (x + 1) - E(x + 1) = x + 1 - E(x) - 1 = x - E(x) = f(x)$ .  
Donc  $f$  est 1-périodique.
2. Pour  $x \in [0, 1[$ ,  $E(x) = 0$ , donc  $f(x) = x - E(x) = x$ .  
Pour  $x \in [1, 2[$ ,  $E(x) = 1$ , donc  $f(x) = x - E(x) = x - 1$ .



$f(x) = x - E(x)$  est la partie fractionnaire (ou décimale) de  $x$

---