Exercices suites numériques 2021-2022

<u>Exercice 1</u> :

Dire en justifiant si les suites (u_n) définies ci-dessous sont arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre. Dans le cas où elles sont arithmétiques ou géométriques, préciser le premier terme et la raison.

1) $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_0 = -5$
2) $u_n = n - 5$
3) $u_n = \frac{1}{3^n}$
4) $u_n = 2\times\frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}}$

<u>Exercice 2</u> : étude d'une suite du type $u_{n+1} = a\times u_n + b$

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et, pour tout entier *n* de $\mathbb{N}^{\times}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

1) Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Ecrire v_n, puis u_n en fonction de n.

<u>Exercice 3</u>

Préciser, si possible, les variations et la limite des suites (v_n) suivantes :

1) $v_n = (-1)^n + 1$
2) $v_n = -3\times 2^n$
3) $v_n = 3\times\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 5$
4) $v_n = \left(\frac{-5}{3}\right)^{n+1}$

<u>Exercice 4</u>

Démontrer par récurrence la formule :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

<u>Exercice 5</u>

Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6.

<u>Exercice 6</u>

Soit x un nombre réel positif.

1) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout n entier naturel, $1 + nx \leq (1 + x)^n$
2) Proposer une autre démonstration de ce résultat.

Exercice 8

On considère la suite u définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1) Démontrer que la suite u est décroissante.
2) Démontrer que la suite u est minorée par 0.
3) Déterminer la limite de la suite u.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$.

1) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
   a) (u_n) est –elle strictement croissante; strictement décroissante ? Justifier.
   b) (u_n) est-elle minorée; majorée ?Si oui, donner un minorant (resp. un majorant) le plus précis possible.
2) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 1$.
   a) Cette suite semble-t-elle majorée; minorée; monotone ?
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.
   c) Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 10

Démontrer que ces suites sont adjacentes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Vérifier avec un tableur que leur limite commune semble être $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 11 : suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8}.$$

1) On pose $v_n = u_n^2 - 16$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa limite ?
2) Démontrer que, pour tout entier n, $|u_n - 4| \leqslant \frac{|v_n|}{4}$.
   En déduire la limite de u_n.

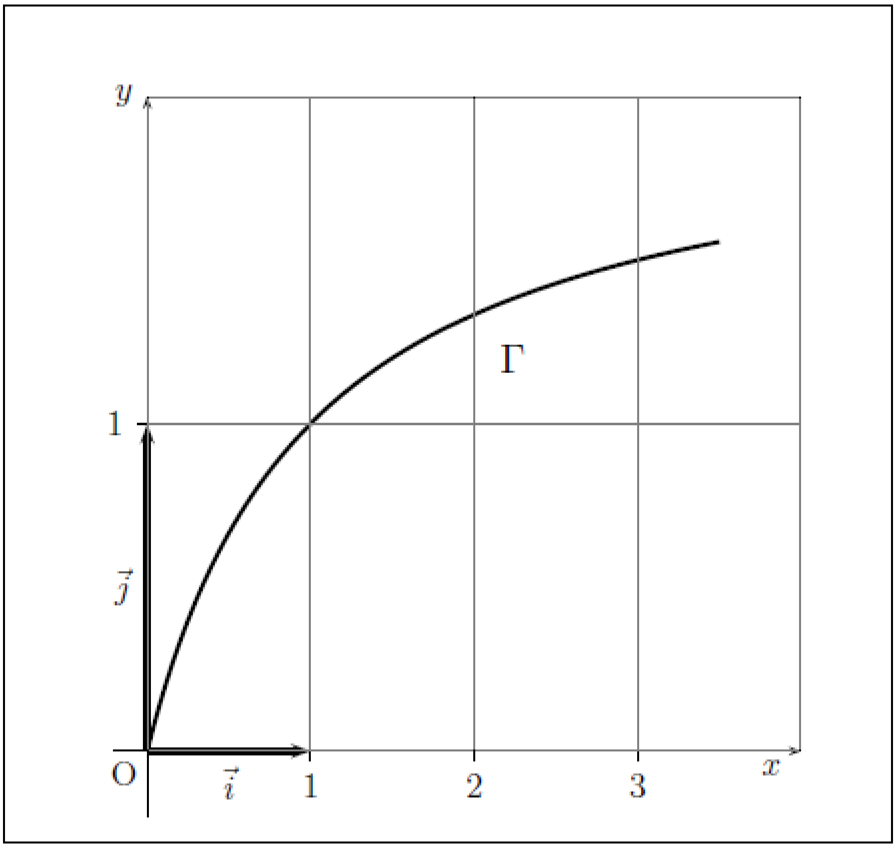
Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \end{cases}$$

1/ a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Le graphique ci-dessous représente sur [0 ;+∞[et dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{2x}{x+1}$.



Placer sur le graphique les points de coordonnées (k, u_k) pour $k = 0, 1, 2$ et 3.

2/ Déduire de la question précédente une conjecture de l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.