

Fonctions Numériques

A- / Ensemble de définition d'une fonction :

1- / Définition :

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. On appelle ensemble de définition \mathcal{D}_f de f , l'ensemble des éléments x de A qui ont une image dans B par f .

2- / Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de chacune des fonctions définies par.

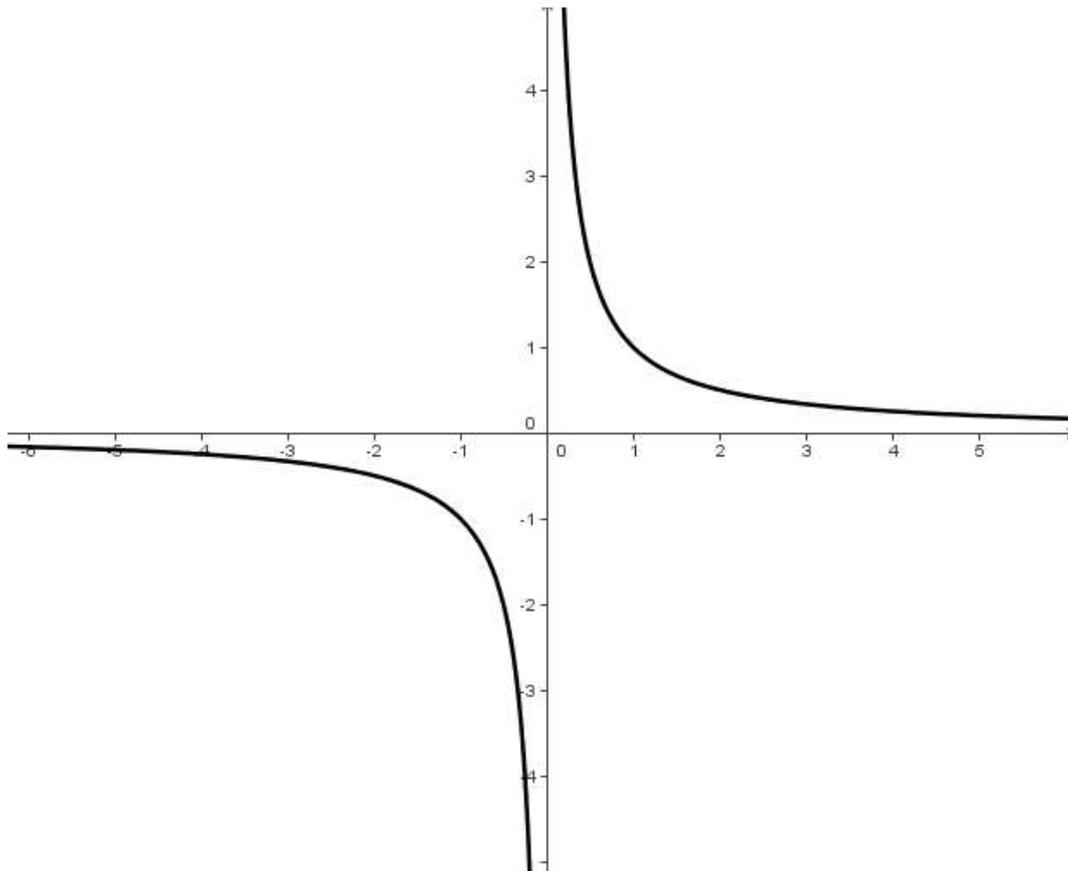
a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 9$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$; c) $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$;

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

B- / Limites :

I- / Approche graphique :

La fonction f est donnée par sa courbe représentative ci-dessous.



1- / Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .

2- / Trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

II- Calcul de limites :

1- Limites obtenues directement ou par transformation de l'expression :

a/ Fonctions Polynômes :

- **Théorème 1** : À l'infini toute fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

- **Exemples** : Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 2x^2 - 5x + 9 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 - 3x^2 + x + 4 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 8x + 1$$

b/ Fonctions Rationnelles :

- **Théorème 2** : À l'infini toute expression se présentant sous la forme d'une fraction a même limite que le rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

- **Exemples** : Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 6x - 7}{4x^2 - 5x + 2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + 7x - 8}{x^2 + 9x - 7} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 2x - 4}{x^3 + 2x^2 - 5x + 2}$$

c/ Fonctions Irrationnelles :

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions puis calculer les limites suivantes.

$$* \quad f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1} \quad ; \quad **$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2} \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x + 2} \right)$$

d- Fonctions Trigonométriques :

Retenons que pour x très voisin de zéro on a : $\sin x = x$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \text{pour } a \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Exercices : Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \right) ; \quad \text{pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$$

2- Limites obtenues par changement de variables :

Exemple : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}}$; en posant $x - \frac{\pi}{6} = u$ on obtient Rép = $-\sqrt{3}$

3- Limites obtenues par encadrement :

a) Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

b) Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

c) Exemple :

Soit $f : x \mapsto f(x) = x + 3 \cos x$.

Pour tout réel x on a : $x - 3 \leq f(x) \leq x + 3$.

- $x - 3 \leq f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 3) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
- $f(x) \leq x + 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4- Théorème des gendarmes :

Soient f ; g et h trois fonctions telles que :

$$\forall x \in]a; b[\text{ si } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ Alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l .$$

Exemple : Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2 + 1} \right) \Leftrightarrow -1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{\sin 3x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

5- Utilisation de la dérivée dans le calcul des limites :

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

b) Exemples

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$$

C- Continuité d'une fonction f :

1- Continuité en un point d'abscisse x_0 :

a) **Définition :** Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition \mathcal{D}_f . On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de \mathcal{D}_f si et seulement si $f(x_0)$ est définie et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ est continue au point} \\ x_0 \text{ de } \mathcal{D}_f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \bullet f(x_0) \text{ définie} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right)$$

b) Exemple :

- Soit $f(x) = \frac{x-2}{2x}$. La fonction f est-elle continue en $x_0=1$? ; en $x_0=0$?

- Soit f définie par $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- f est-elle continue en $x_0 = 2$?

2- Prolongement par continuité en un point :

a) Définition :

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité au point } x_0 \end{array} \right) \text{ si et seulement, si } \left(\begin{array}{l} \bullet x_0 \notin \mathcal{D}_f \\ \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

Son prolongement est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

b) Exemple et contre exemple :

– Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$; f est-elle prolongeable par continuité en $x_0 = 1$? si oui déterminer son prolongement g .

– Soit f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

3– Continuité d'une fonction sur un intervalle $I = [a ; b]$:

Une fonction f est continue sur $I = [a ; b]$, si elle est continue en tout point de $I = [a ; b]$.

4– Théorème 3:

Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

5– Théorème 4 :

Si f et g sont deux fonctions respectivement continue en x_0 ; alors les

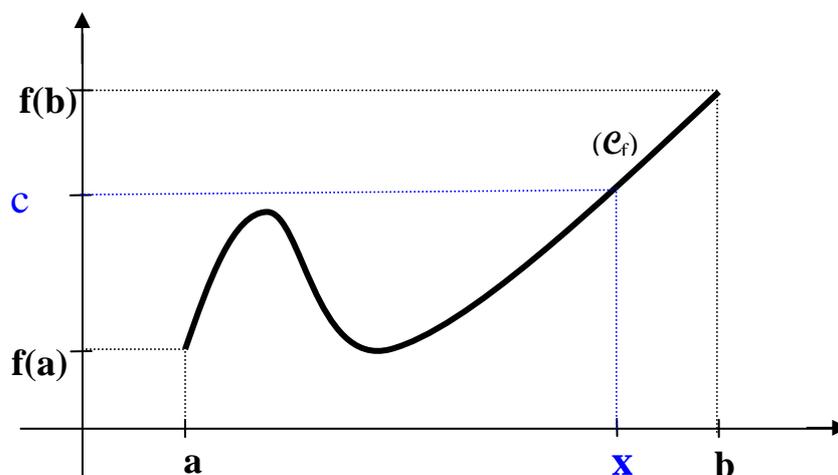
fonctions $(f + g)$; $(f - g)$; $(f \times g)$; (λf) ($\lambda \in \mathbb{R}$) ; $\left(\frac{f}{g}\right)$ si $g(x) \neq 0$

sont continues en x_0 .

6– Théorème des valeurs intermédiaires :

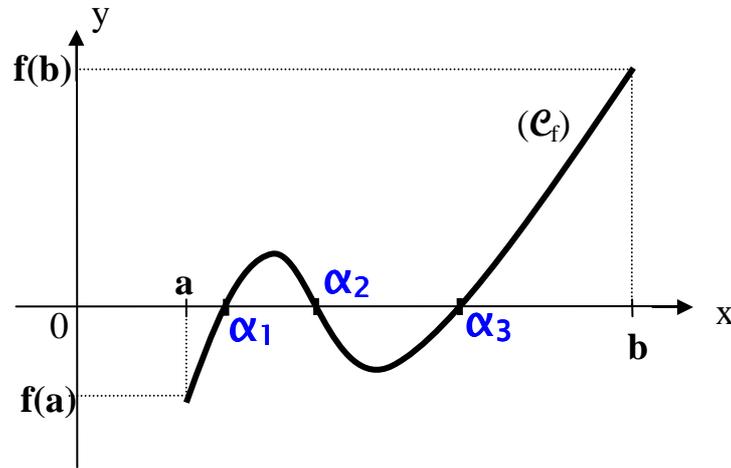
a) Énoncé du théorème 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a ; b]$ et c un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$ inclusivement ; alors il existe au moins une valeur x dans l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(x) = c$.



b) Conséquence du Théorème 5 :

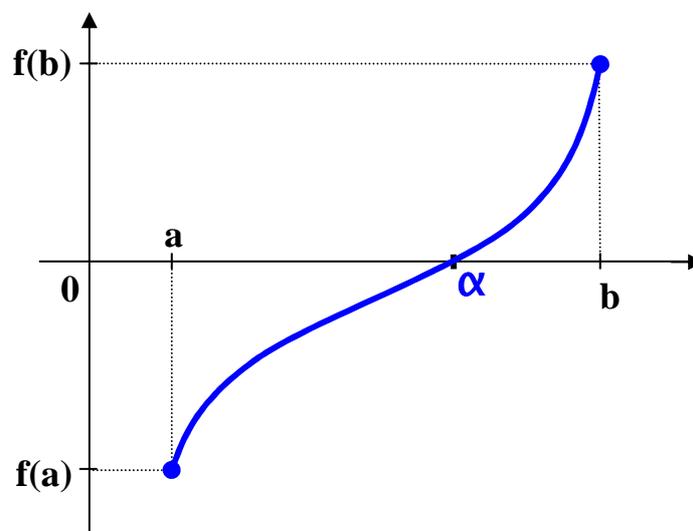
Si f est une fonction continue sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



b) Théorème de la bijection :

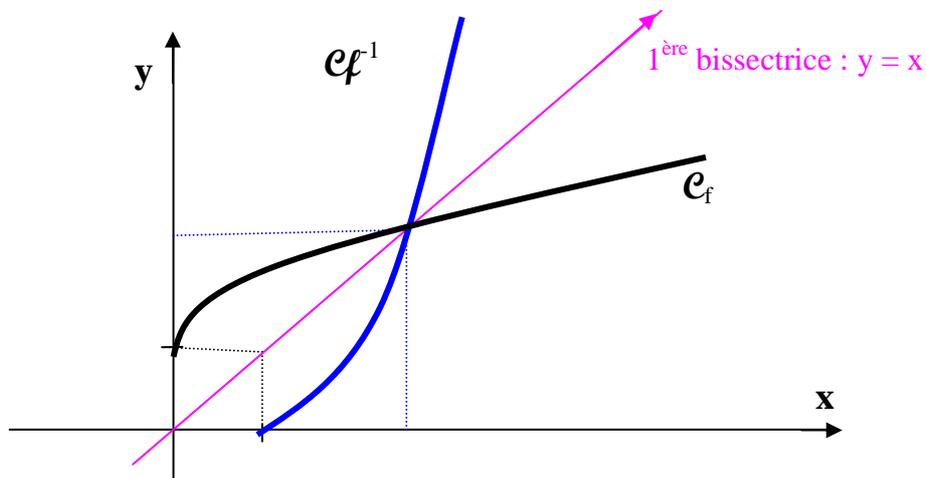
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$ alors f réalise une bijection de $I = [a ; b]$ sur $f(I)$ où $f(I)$ est un intervalle.

De plus si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[a ; b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



7- Représentation graphique d'une bijection réciproque :

Pour représenter la courbe ($e_{f^{-1}}$) de la bijection réciproque de la bijection f ; on trace le symétrique orthogonal de la courbe (e_f) de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



8- Rappels :

Soit f la fonction définie sur un intervalle $I = [a ; b]$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I .

- Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ alors f est croissante sur I .
- Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ alors f est décroissante sur I .
- $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \text{ si } f(x_1) = f(x_2)$ alors f est constante sur I .

D- / Dérivée d'une fonction numérique :

1- Fonction dérivable en un point :

a) Définition : On dit qu'une fonction f est dérivable au point d'abscisse x_0 (ou admet un nombre dérivé au point x_0) de son ensemble de définition si et seulement, si : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A ; (A \in \mathbb{R})$. A est noté $f'(x_0)$ et est appelé le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 .

b) Exemples :

Etudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $x_0 = 2$;
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $x_0 = -1$

2- Équation de la tangente à la courbe en un point x_0 :

L'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}_f) de f au point d'abscisse x_0 est

$$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

3- Remarque : Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses en x_0 .

4- Techniques de dérivation :

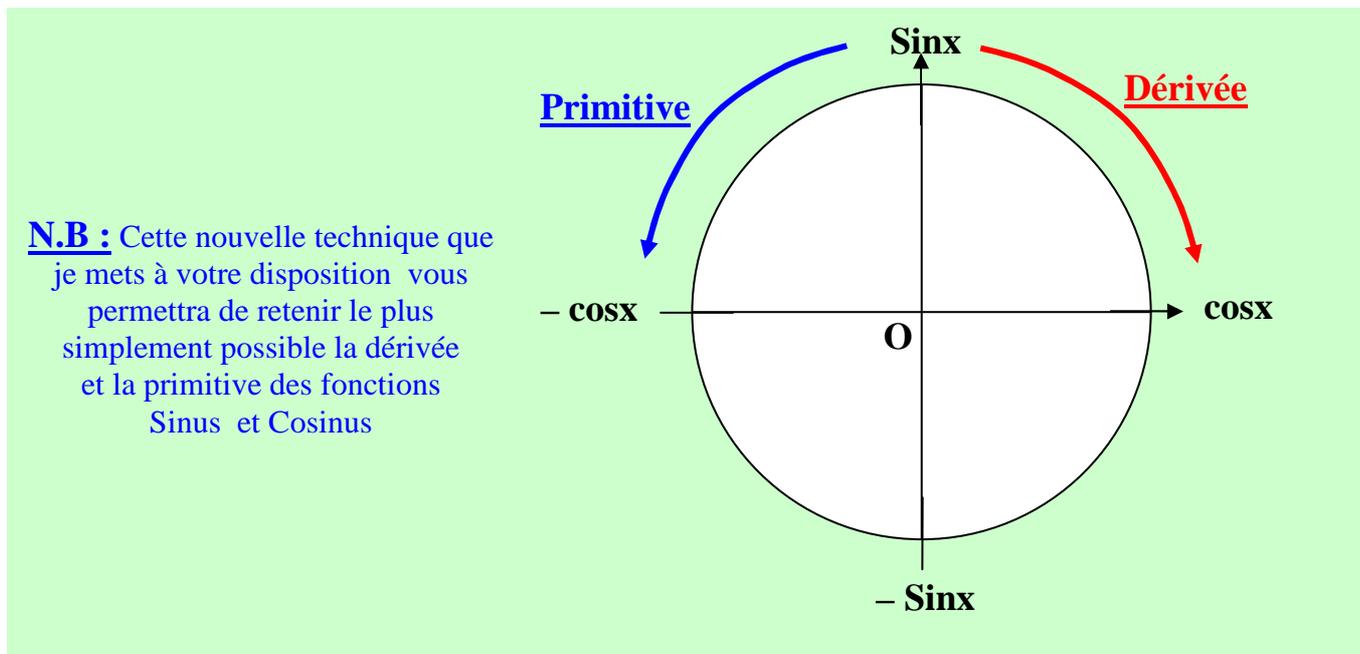
a) Formules de dérivation :

Soient f ; u et v des fonctions dérivables en un point x de l'intervalle I.

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u = f^n$	$u' = (f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$
$f = u + v$	$f' = (u + v)' = u' + v'$
$f = u \times v$	$f' = (u \times v)' = u'v + v'u$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = u(ax + b)$	$f'(x) = a \times u'(ax + b)$

b) Dérivées de fonctions circulaires :

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{cot} gx$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cot}^2 gx)$



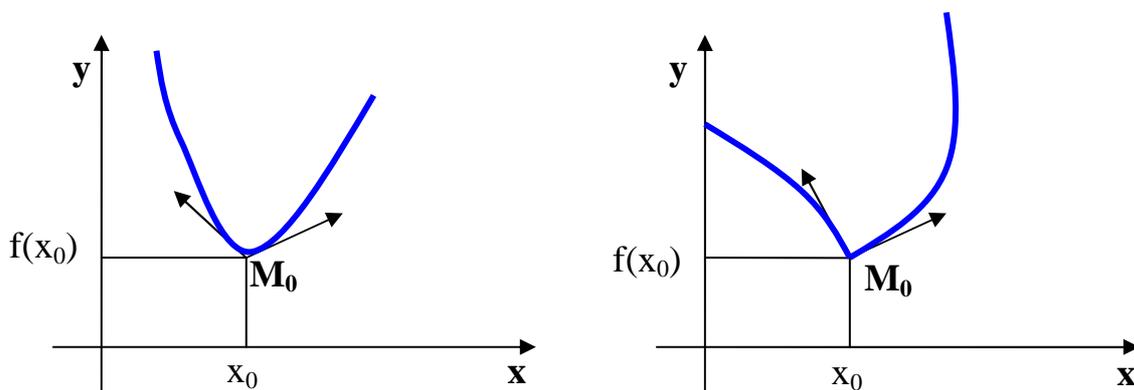
c) Dérivée de la bijection réciproque :

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

5- Extension du nombre dérivé :

a) Point anguleux

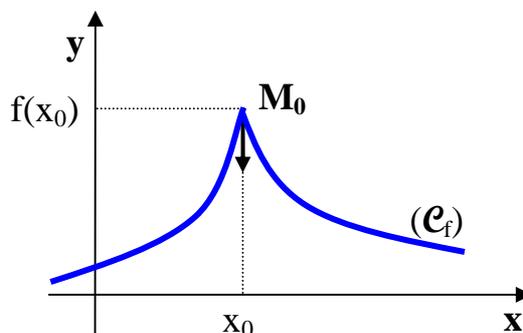
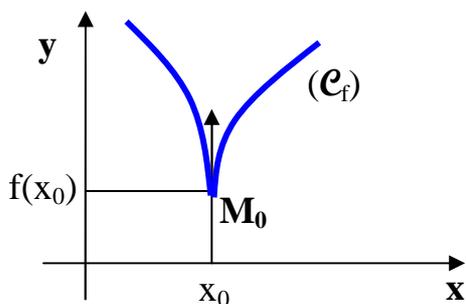
Soit f une fonction numérique admettant au point x_0 un nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$ différent du nombre dérivé à droite $f'_d(x_0)$. On dit que la fonction f **n'est pas dérivable en x_0** et le point d'abscisse x_0 est **un point anguleux** de la courbe (C_f) .



La courbe présente au point d'abscisse x_0 deux demi tangentes.

- Une demi tangente à gauche de pente = $f'_g(x_0)$;
- Une demi tangente à droite de pente = $f'_d(x_0)$.

b) Point de rebroussement ou un pic :



$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty ;$$

Alors la courbe (C_f) présente au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. On dit que le point d'abscisse x_0 est **un point de rebroussement ou un pic**.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty ;$$

Alors la courbe (C_f) présente au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le bas. On dit que le point d'abscisse x_0 est **un point de rebroussement ou un pic**.

E- / Inégalités des Accroissements Finis :

Soit f une fonction dérivable sur $I = [a ; b]$ où a et b sont des réels.

• Première Forme :

Si $a \leq b$ et si les réels m et M sont tels que : $\forall x \in [a ; b]$
 $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

• Deuxième Forme :

Si k est un réel tel que : $\forall x \in [a ; b] = I$,
 $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k |b - a|$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

Démontrer que pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

F- / Dérivabilité et continuité :

1- Théorème 6 : (admis)

Si une fonction numérique est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Par contre, une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

2- Exemple : $f : x \mapsto f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$, mais pas dérivable en $x = 0$.

ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

I – Quelques propriétés géométriques :

1. Fonctions paires :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition \mathcal{D}_f est dite paire si, et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, (-x) \in \mathcal{D}_f ; f(-x) = f(x)$.

La courbe (\mathcal{C}_f) de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Fonction impaire :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition \mathcal{D}_f est dite impaire si, et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, (-x) \in \mathcal{D}_f ; f(-x) = -f(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans un repère cartésien.

3. Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation $x = a$, ($a \in \mathbb{R}$) est axe de symétrie pour la courbe (\mathcal{C}_f) de f , si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$.

4. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point $I(a ; b)$ est un centre de symétrie pour la courbe (\mathcal{C}_f) de f si et seulement si, $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

5. Fonctions périodiques :

Une fonction numérique f est périodique si, seulement si il existe un réel strictement positif t tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x+t) = f(x)$.

On dit alors que t est une période de f .

- Si $f(x) = \cos(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si $f(x) = \sin(ax + b)$ alors la période $T = \frac{2\pi}{|a|}$;
- Si $f(x) = \tan(ax + b)$ alors la période $T = \frac{\pi}{|a|}$.

II – Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

- Déterminer l'ensemble de définition (étudier la continuité)
 - Etudier éventuellement la parité. Recherche de la période, des symétries afin de réduire l'intervalle d'étude.
 - Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
 - Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation.
 - Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
 - Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction
 - Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
 - Points d'inflexion etc.
-

III – Exemple d'étude de fonctions polynômes :

1- Théorème 1: Si f admet un extremum relatif d'abscisse x_0 , alors $f'(x_0) = 0$ ou f n'est pas dérivable en x_0 .

2- Théorème 2: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a ; b[$.

Si $f'(x)$ s'annule en x_0 de $]a ; b[$ en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0 .

3- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

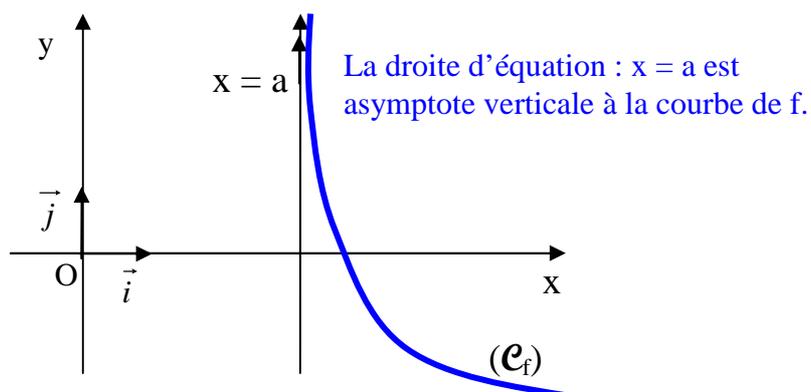
- Etudier les variations de f ;
- Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera. On déterminera les intersections de la courbe (\mathcal{C}_f) de f avec les axes de coordonnées.
- Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans un repère orthonormé. Quels sont les extremums relatifs de f ? En quels points sont-ils atteints ?

IV – Exemple d'étude de fonctions rationnelles :

1- Recherche d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées :

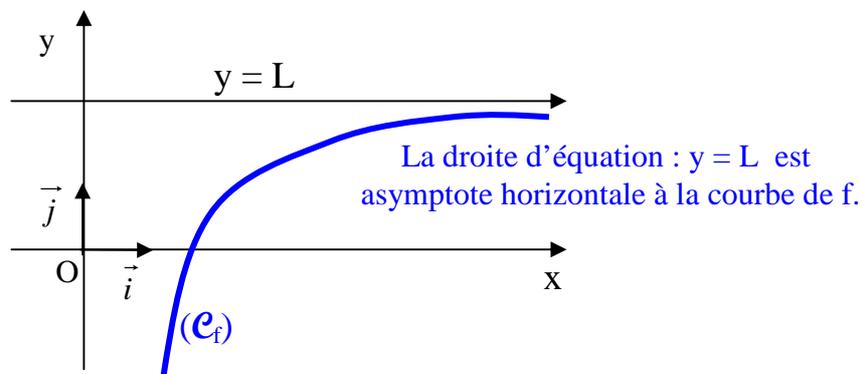
a) Asymptote Verticale :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe (\mathcal{C}_f) de f .



b) Asymptote horizontale :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ (réel), alors la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe (\mathcal{C}_f) de f .



2- Exemple : Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$.

3- Asymptote oblique :

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors il y a possibilité d'asymptote oblique en $\pm\infty$.
- Si $f(x) = ax + b + C(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C(x) = 0$; alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.
- La droite (\mathcal{D}) d'équation : $y = ax + b$ est dite asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$; si et seulement, si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

4- Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

Pour étudier la position de la courbe (\mathcal{C}_f) de f par rapport à son asymptote oblique (\mathcal{D}) d'équation : $y = ax + b$; on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ dans $\mathcal{D}f$.

1^{er} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] < 0$; alors la courbe (\mathcal{C}_f) est en dessous de (\mathcal{D}) .

2^{ème} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] > 0$; alors la courbe (\mathcal{C}_f) est au dessus de (\mathcal{D}) .

3^{ème} cas : Si $[f(x) - (ax + b)] = 0$; alors la courbe (\mathcal{C}_f) coupe (\mathcal{D}) en un point x_0 .

5- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 2}$.

- Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$;
- Montrer que la courbe (\mathcal{C}_f) de f admet une asymptote oblique (\mathcal{D}) à préciser ;
- Etudier la fonction f ;
- Montrer que le point $I(2 ; -1)$ est centre de symétrie pour la courbe (\mathcal{C}_f) de f ;
- Etudier la position relative de (\mathcal{C}_f) par rapport à (\mathcal{D}) ;
- Construire (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé.

6- Recherche de l'asymptote oblique :

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . S'il existe deux réels a et b tels que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \quad \text{alors la courbe } (\mathcal{C}_f) \text{ de } f \text{ admet}$$

pour asymptote la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Dans cette recherche 5 cas peuvent se présenter qu'on résume dans le tableau ci-dessous.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$		$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$	
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	Direction asymptotique Δ définie par la droite d'équation : $y = ax$	$b \quad (b \in \mathbb{R})$	Asymptote oblique : $y = ax + b$.
		$+\infty$ ou $-\infty$	Branche parabolique de direction Δ .
		Pas de limite	
$+\infty$ ou $-\infty$	Direction asymptotique Δ définie par la droite d'équation : $x = 0$.		Branche parabolique de direction Δ .
Pas de limite	Pas de direction asymptotique		