Chapitre II

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

II.1 Equation différentielle

Forme générale de l'équation de lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{q\,ext} \quad (1)$$

où $F_{q\,ext}$ est la force généralisée associée à $\vec{F}_{ext}$ et où la fonction dissipation est $D = \frac{1}{2}\beta \dot{q}^2$

Pour les oscillations de faible amplitude le lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} b_0 q^2$$

D'ou l'équation différentielle du mouvement

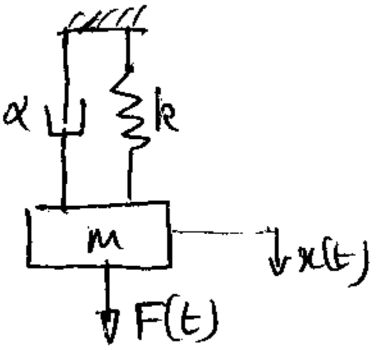
$$a_0 \ddot{q} + \beta \dot{q} + b_0 q = F_{ext_q}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre à coefficient constantes, avec second membre.

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \quad (2)$$

avec : $$\delta = \frac{\beta}{2a_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \quad \text{et} \quad A(t) = \frac{F_{q\,ext}}{a_0} \quad (3)$$

II.2) exemple : système masse - ressort - amortisseur



l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = A(t)$$

avec $\delta = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $A(t) = \frac{F(t)}{m}$

II.3) Solution de l'équation différentielle

La solution de cette équation différentielle du second ordre est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre (ou solution homogène) $x_H(t)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre $x_p(t)$.

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \quad (4)$$

On sait que $x_H(t) \longrightarrow 0$ si $t \nearrow\nearrow$ donc la solution homogène est alors pratiquement nulle. Il ne restera que la solution particulière de l'équation avec second membre.

$$x(t) \simeq x_p(t) \quad (5).$$

II.3.1) Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$

a) Calcul de la solution permanente à l'aide de la méthode des nombres complexes.

Soit le déplacement complexe représenté par le nombre complexe $x = \underline{X}\, e^{j\Omega t}$, avec $\underline{X} = X_0\, e^{j\varphi}$. Nous pouvons considérer que $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$ constitue la partie réelle du nombre complexe $A = A_0\, e^{j\Omega t}$. L'équation différentielle se transforme en une simple équation algébrique en fonction de l'amplitude complexe $\underline{X}$.

$$\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j\, 2\delta\, \Omega\right] \underline{X} = A_0 \quad (6)$$

dont la solution est

$$\underline{X} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j\, 2\delta\, \Omega} \quad (7)$$

D'où l'on tire l'amplitude X_0 et la phase φ :

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}} \\ \varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} \end{cases} \quad (8)$$

b) Etude des variations de l'amplitude et de la phase en fonction de la pulsation de l'excitation

le maximum de l'amplitude est obtenu pour la valeur qui annule $\frac{dX_0}{d\Omega}$.

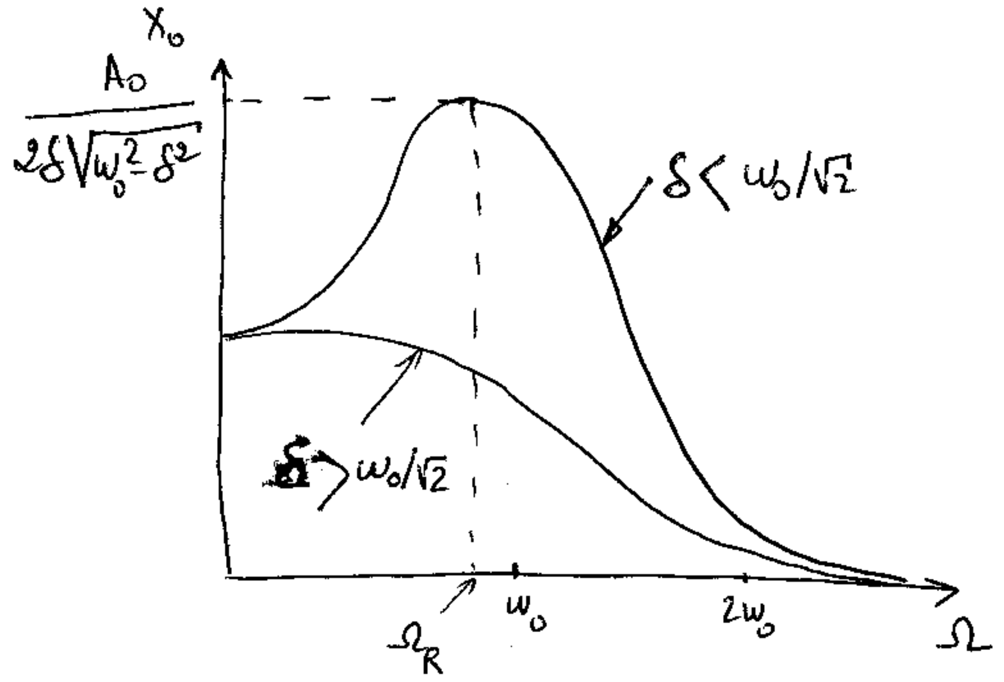
$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \quad (9)$$

A cette pulsation appelée pulsation de résonance, on dit que le système entre en résonance et l'amplitude X_0 est maximale :

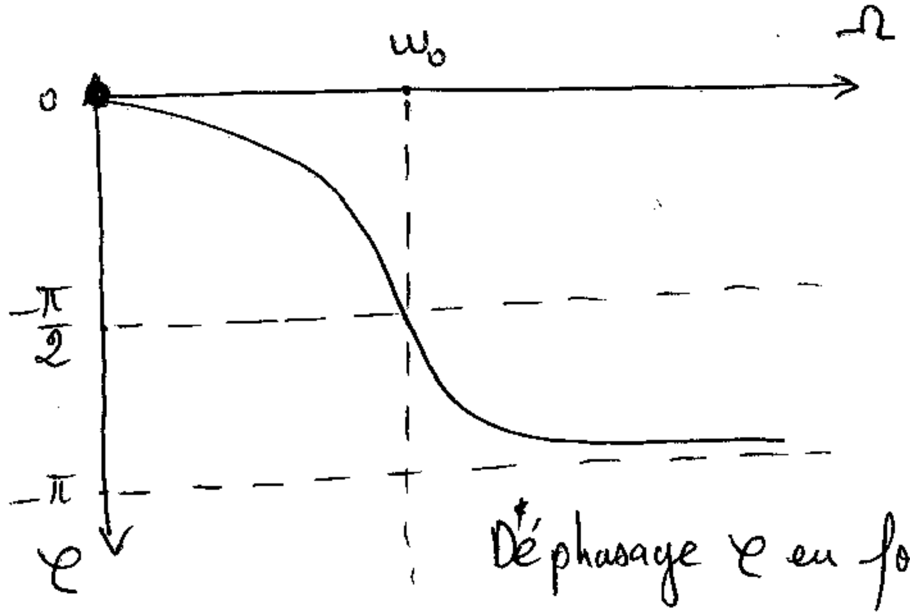
$$X_{0\,max} = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \quad (10)$$

la figure représentant les variations de X_0 en fonction de la pulsation d'excitation Ω est appelée courbe de résonance en amplitude. On remarque qu'à la pulsation ω_0, le déphasage φ est égal à $-\frac{\pi}{2}$ et qu'à la résonance

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}}{\delta}\right).$$



Amplitude X_0 en fonction de Ω



Déphasage φ en fonction de Ω.