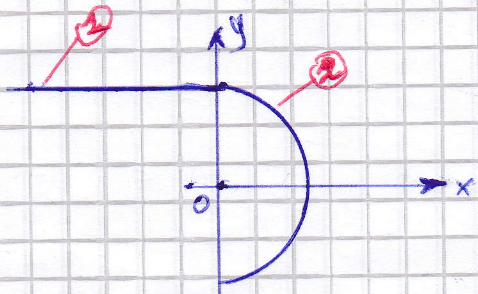
TD 3 : Centre de Gravité

Ex. 1 : Fig 1 (a).

Cas linéique. (توزيع خطي)

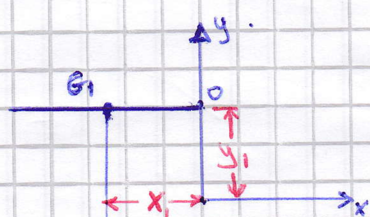
$Z_G = 0 \rightarrow$ cas plan.



la structure est divisé en 2 parties ① et ② ; on utilise les formules suivantes : formule du Barycentre

$$x_G = \frac{\sum x_i \cdot L_i}{\sum L_i} \text{ et } y_G = \frac{\sum y_i \cdot L_i}{L_i}$$

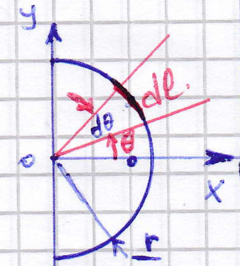
① $x_1 = -r$
$y_1 = r$
$L_1 = 2r$



② symétrie / 0x.

$\Rightarrow y_{G_2} = y_2 = 0$

$x_{G_2} = x_2 = ?$



$$x_2 = \frac{\int x \cdot dl}{\int dl}$$

$dl = r\,d\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$L_2 = \int dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} r\,d\theta = r\pi$$

$x = r\cos\theta$

$$\int x\,dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\theta\,d\theta = 2r^2$$

$$x_2 = \frac{\int x\,dl}{\int dl} = \frac{2r^2}{r\pi} = \frac{2r}{\pi}.$$

② $\rightarrow \quad x_2 = \frac{2r}{\pi} \qquad L_2 = r\pi.$

$y_2 = 0$

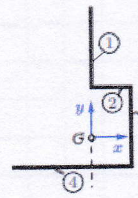
$$X_G = \frac{x_1 \cdot L_1 + x_2 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = 0$$

$$Y_G = \frac{y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \frac{2}{2+\pi} \cdot r \simeq 0{,}4r$$

Ex. 1 : Fig. 1 (d).

l'origine du centre de repère est placé au centre de gravité G recherché. (axes xGy).

On divise la structure en 4 parties:



$x_G = \frac{\sum x_i\, l_i}{\sum l_i}$; pour plus de clarté, utilisons le tableau ci-dessous :

i	l_i	x_i	$x_i\, l_i$
1	a	0	0
2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a^2}{8}$
3	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{2}$
4	l	$\frac{a}{2} - \frac{l}{2}$	$\frac{al}{2} - \frac{l^2}{2}$
$\sum$	$\frac{5a}{2} + l$	–	$\frac{5a^2}{8} + \frac{al}{2} - \frac{l^2}{2}$

$G \in$ à l'axe $Y \Rightarrow x_G = 0$; on écrit :

$$\sum x_i\, l_i = \frac{5a^2}{8} + \frac{al}{2} - \frac{l^2}{2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad l^2 - al - \frac{5a^2}{4} = 0.$$

ce qui donne :

$$l_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}a,$$

On prend la valeur positive :

$$\underline{\underline{l = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{6})}}.$$